Klausur Mathematische Grundlagen (1141) WS 07/08

Klausur am 32.12.2007:

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

zu Aufgabe 1

1. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & | & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$. Um diese Matrix in Treppennormalform zu überführen, subtrahieren wir das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten und die erste Zeile von der dritten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir addieren das Doppelte der vierten Zeile zur zweiten und die vierte Zeile zur dritten. Dies ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir vertauschen die zweite und die vierte Zeile und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren die zweite Zeile von der ersten und die dritte Zeile von der zweiten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix.

2. In $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ streichen wir die Nullzeile und fügen eine Nullzeile so ein, dass die Matrix links des Striches quadratisch ist und die Pivot-Positionen auf der Diagonalen stehen. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Rechts des Striches steht $\lambda_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, eine Lösung des linearen Gleichungssystems.

In $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ersetzen wir die Null auf der Diagonalen durch -1 und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Lösungsmenge ist dann

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

zu Aufgabe 2

1. Seien $a + bT + cT^2$ und $a' + b'T + c'T^2$ in V. Dann gilt

$$\begin{aligned} f((a + bT + cT^2) + (a' + b'T + c'T^2)) &= f((a + a') + (b + b')T + (c + c')T^2) \\ &= (a + a' + c + c') + (b + b')T^2 \\ &= (a + c) + bT^2 + (a' + c') + b'T^2 \\ &= f(a + bT + cT^2) + f(a' + b'T + c'T^2). \end{aligned}$$

Sei $r \in \mathbb{R}$, und sei $a + bT + cT^2 \in V$.Dann gilt

$$\begin{aligned} f(r(a+bT+cT^2)) &= f(ra+rbT+rcT^2) \\ &= (ra+rc)+rbT^2 \\ &= r((a+c)+bT^2) \\ &= rf(a+bT+cT^2). \end{aligned}$$

Es folgt, dass f linear ist.

2. Als Basis $\mathcal{B}$ wählen wir die Standardbasis, also $\mathcal{B} = (1, T, T^2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 &&= 1 \cdot 1 + 0 \cdot T + 0 \cdot T^2, \\ f(T) &= T^2 &&= 0 \cdot 1 + 0 \cdot T + 1 \cdot T^2, \\ f(T^2) &= 1 &&= 1 \cdot 1 + 0 \cdot T + 0 \cdot T^2. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten schreiben wir als Spalten in eine Matrix und erhalten

$${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Es ist $\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}({}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)) = 2$.

zu Aufgabe 3

1. Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium.

   Das Nullpolynom liegt in U, denn es ist von der Form $2a + 3b + bT + aT^2$, mit $a = b = 0$.

   Seien $2a+3b+bT+aT^2$ und $2a'+3b'+b'T+a'T^2$ in U. Dann gilt $(2a+3b+bT+aT^2)+(2a'+3b'+b'T+a'T^2) = 2(a+a')+3(b+b')+(b+b')T+(a+a')T^2 \in U$.

   Sei $2a + 3b + bT + aT^2 \in U$, und sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt $r(2a + 3b + bT + aT^2) = 2ra + 3rb + rbT + raT^2 \in U$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}[T]$ ist.

2. Die Polynome $2 + T^2$ und $3 + T$ liegen in U. Wir zeigen, dass $(2 + T^2, 3 + T)$ eine Basis von U ist.

   Erzeugendensystem: Sei $2a + 3b + bT + aT^2 \in U$. Dann gilt

   $$2a + 3b + bT + aT^2 = a(2 + T^2) + b(3 + T),$$

   und es folgt, dass $(2 + T^2, 3 + T)$ ein Erzeugendensystem von U ist.

Lineare Unabhängigkeit: Die beiden Polynome $2+T^2$ und $3+T$ sind keine Vielfachen voneinander. Es folgt, dass sie linear unabhängig sind.

Da die Polynome in U liegen, ein Erzeugendensystem von U bilden und linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von U.

zu Aufgabe 4

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann gilt $\sum_{i=1}^{1}(4i-3) = 4-3 = 1$ und $1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = 1$. Es gilt also der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Sei $n \geq 1$ und $\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(4i-3) &= \sum_{i=1}^{n}(4i-3) + 4(n+1) - 3 \\
&= n(2n-1) + 4n + 1 \\
&= 2n^2 + 3n + 1 \\
&= (n+1)(2n+1) \\
&= (n+1)(2(n+1)-1).
\end{aligned}$$

Wir haben also die Aussage „Wenn $\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$, so folgt $\sum_{i=1}^{n+1}(4i-3) = (n+1)(2(n+1)-1)$“ bewiesen, und mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass $\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

zu Aufgabe 5

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$ ist. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann $n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon^2$, und somit $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, denn die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend. Für alle $n \geq n_0$ erhalten wir somit die Abschätzung

$$|\sqrt{n} - \sqrt{n-1}| = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Es folgt, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

zu Aufgabe 6

1. Wir beweisen die Konvergenz mit dem Wurzelkriterium. Sei $a_n = (\frac{3}{4} + \frac{1}{n})^n$. Für alle $n > 8$ gilt
$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{4} + \frac{1}{n} < \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} < 1.$$
Für fast alle a_n gilt somit $\sqrt[n]{a_n} < \frac{7}{8} < 1$. Mit dem Wurzelkriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

2. Wir beweisen die Konvergenz mit dem Leibniz-Kriterium. Sei $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$. Dann gilt
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1} > \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = b_{n+1},$$
denn $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$. Somit ist (b_n) streng monoton fallend. Weiter gilt für alle $n \geq 1$
$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Da $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ eine Nullfolge ist (Beweis wie in Aufgabe 5), ist (b_n) eine Nullfolge. Mit dem Leibniz-Kriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

3. Wir beweisen die Behauptung mit dem Quotientenkriterium. Sei $a_n = \frac{n^2}{3^n}$. Dann gilt
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}).$$
Es ist $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) = 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \frac{1}{3} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergent ist.

zu Aufgabe 7

Für $x \in \{-1, 1\}$ ist f nicht definiert. Sei $x \notin \{-1, 1\}$. Es ist $\tan(\frac{\pi x}{x^2-1}) = \frac{\sin(\frac{\pi x}{x^2-1})}{\cos(\frac{\pi x}{x^2-1})}$. Dieser Ausdruck ist genau dann nicht definiert, wenn der Nenner 0 ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\frac{\pi x}{x^2-1} \in \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist.

Es gilt
$$\begin{aligned}
& \tfrac{\pi x}{x^2-1} \in \{(k+\tfrac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{x}{x^2-1} = k + \tfrac{1}{2} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{x}{x^2-1} = \tfrac{2k+1}{2} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - 1 = \tfrac{2}{2k+1}x \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - \tfrac{2}{2k+1}x - 1 = 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \tfrac{1 \pm \sqrt{4k^2+4k+2}}{2k+1} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass f für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, \frac{1 \pm \sqrt{4k^2+4k+2}}{2k+1} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert ist.

Die Funktion ist überall dort, wo sie definiert ist, stetig, denn sie ist die Komposition der stetigen Funktionen $x \mapsto \tan(x)$ und $x \mapsto \frac{\pi x}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$.

zu Aufgabe 8

Die gegebene Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich zweimal differenzierbar. Ihre Ableitungen sind

$$f'(x) = (nx^{n-1} - x^n) \exp(-x) \text{ und } f''(x) = (n(n-1)x^{n-2} - 2nx^{n-1} + x^n) \exp(-x).$$

Nullstellen hat f' in $x_0 \in \{0, n\}$. In $x_0 = n$ ist

$$f''(n) = (n(n-1)n^{n-2} - 2nn^{n-1} + n^n) \exp(-n) = -n^{n-1} \exp(-n) < 0,$$

sodass hier ein lokales Maximum vorliegt.

Klausur 9 Februar Wintersemester 2008/2009, Antworten

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Lösungen der Klausur Mathematische Grundlagen (1141) WS 07/08

Klausur am 09.02.2008:

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

zu Aufgabe 1

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix überführen wir in Treppennormalform und erhalten

$$T' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Links des Strichs steht die Treppennormalform T der Koeffizientenmatrix A.

Wir führen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Strichs quadratisch ist und die Pivot-Positionen auf der Diagonalen stehen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Rechts des Strichs steht eine spezielle Lösung des linearen Gleichungssystems. Wir fügen nun -1 überall auf der Diagonalen ein, wo 0 steht.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

An dieser Matrix können wir die Lösungsmenge ablesen: Eine spezielle Lösung steht rechts des Strichs, und die Lösungsmenge des homogenen Systems ist die Menge der Linearkombinationen der Spalten, in denen wir -1 eingeführt haben. Es folgt:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

zu Aufgabe 2

1. Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ in V. Es gilt

$$\begin{aligned} f(A+B) &= \begin{pmatrix} 2a+2x & b+c+y+z \\ b+c+y+z & 2d+2u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ y+z & 2u \end{pmatrix} = f(A) + f(B). \end{aligned}$$

   Seien $x \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt

$$f(xA) = \begin{pmatrix} 2xa & xb+xc \\ xb+xc & 2xd \end{pmatrix} = xf(A).$$

   Es folgt, dass f linear ist.

2. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(f) &= \langle f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}) \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Die Matrizen $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, bilden also eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Mit dem Rangsatz gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)),$$

also $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 4 - 3 = 1$. Es reicht also, eine linear unabhängige Matrix in $\mathrm{Kern}(f)$ zu finden.

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $A \in \mathrm{Kern}(f)$. Somit ist A eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

zu Aufgabe 3

Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium. Die Nullmatrix liegt in V. Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt $A + B = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ b + b' & c + c' \end{pmatrix} \in V$. Sei $r \in \mathbb{R}$, und sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt $(rA) = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rb & rc \end{pmatrix}$, also $rA \in V$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass V ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

zu Aufgabe 4

Für den Induktionsanfang sei $n = 1$. Es sind $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

In der Induktionsannahme nehmen wir an, es sei $n \geq 1$ und es gelte $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\ &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}. \end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.

zu Aufgabe 5

Es gilt $(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n) = n^2+n-n^2 = n$. Es folgt

$$\sqrt{n^2+n}-n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n}$. Da die konstante Folge (1) und die Folge $(1+\frac{1}{n})$ konvergent sind und den Grenzwert 1 haben, konvergiert $(\sqrt{1+\frac{1}{n}})$ ebenfalls gegen 1. Somit ist die Folge $(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+1}})$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

zu Aufgabe 6

Wir verwenden zum Beweis das Quotientenkriterium. Es gilt

$$\begin{aligned}\tfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \tfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \tfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \tfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \tfrac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \tfrac{n+1}{4n+2}.\end{aligned}$$

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{4n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n}}) = \frac{1}{4} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergent ist.

zu Aufgabe 7

Sei $x \in I$. Ist $x \in I \cap \mathbb{Q}$, so gilt nach Annahme $f(x) = g(x)$. Wir können also annehmen, dass $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es eine Folge (x_n), deren Glieder alle in $\mathbb{Q}$ liegen, und die den Grenzwert x hat. Es folgt $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$, denn f und g sind stetig.

zu Aufgabe 8

Sei $f(x) = \sin(\frac{\cos(x)}{x})$, und sei $g(x) = \sin(\frac{\cos(x)}{x})$. Mit der Kettenregel gilt

$$f'(x) = g'(x) \cdot \frac{1}{2}g(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}g'(x)(\sin(\frac{\cos(x)}{x}))^{-\frac{1}{2}}.$$

Sei $h(x) = \frac{\cos(x)}{x}$. Dann gilt wieder mit der Kettenregel

$$g'(x) = h'(x)\cos(\frac{\cos(x)}{x}).$$

Mit der Quotientenregel gilt

$$h'(x) = \frac{x(-\sin(x)) - \cos(x)}{x^2}.$$

Es folgt

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{x(-\sin(x)) - \cos(x)}{x^2}\cos(\frac{\cos(x)}{x})(\sin(\frac{\cos(x)}{x}))^{-\frac{1}{2}}.$$

zu Aufgabe 9

1. (a) Sei $U = \mathbb{N}$ das Universum.
   (b) Seien $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathfrak{I}(Q) = \mathbf{Q} = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathbf{P}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen, und $\mathbf{Q}$ ist die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen. Da jede natürliche Zahl gerade oder ungerade ist, ist $\mathfrak{I}(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = \mathbf{1}$.
2. (a) Sei $U = \mathbb{N}$ das Universum.
   (b) Seien $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathfrak{I}(Q) = \mathbf{Q} = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathbf{P}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen, und $\mathbf{Q}$ ist die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen, die ≥ 3 sind. Da 1 weder in $\mathbf{P}$ noch in $\mathbf{Q}$ liegt, ist $\mathfrak{I}(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = \mathbf{0}$.

Mathematische Grundlagen: Nachklausur vom 29.03.2008

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Lösungen der Nachklausur Mathematische Grundlagen (1141) WS 07/08

Nachklausur am 29.03.2008:

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

zu Aufgabe 1

Wir überführen die erweiterte Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$ in Treppennormalform. Dazu subtrahieren wir die zweite Zeile von der ersten und erhalten $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$. Jetzt subtrahieren wir die dritte Zeile von der ersten und addieren sie zur zweiten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist in Treppennormalform. Wir fügen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Strichs quadratisch wird und die Pivot-Positionen auf der Diagonalen stehen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Rechts des Strichs steht eine spezielle Lösung $\lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wir fügen -1 dort auf der Diagonalen ein, wo 0 steht und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Jetzt können wir $\mathcal{L}$ ablesen. Es ist

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

zu Aufgabe 2

Es sind

$$\begin{array}{rcl} f(v_1) &=& 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 \\ f(v_2) &=& 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 \\ f(v_3) &=& 1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3. \end{array}$$

Es folgt

$${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = \mathrm{Rg}({}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f))$. Zur Rang-Bestimmung beginnen wir, die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ in Treppennormalform zu überführen. Wir vertauschen die erste und die dritte Zeile und erhalten $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jetzt subtrahieren wir die erste Zeile von der zweiten und erhalten $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jetzt können wir aber schon aufhören, denn es ist klar, dass diese Matrix den Rang 3 hat. Somit folgt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 3$.

zu Aufgabe 3

1. Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium. Mit $a = b = 0$ liegt das Nullpolynom in U. Seien $a, a', b, b', s \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & (a + bT + aT^2 + (a+b)T^3) + (a' + b'T + a'T^2 + (a'+b')T^3) \\ = \; & (a+a') + (b+b')T + (a+a')T^2 + (a+a'+b+b')T^3 \in U \end{aligned}$$

   und

$$s(a + bT + aT^2 + (a+b)T^3) = sa + sbT + saT^2 + (sa+sb)T^3 \in U.$$

   Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von V ist.

2. Mit $a = 1$ und $b = 0$ gilt $1 + T^2 + T^3 \in U$, und mit $a = 0$ und $b = 1$ gilt $T + T^3 \in U$. Diese Polynome sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander. Wir zeigen nun, dass sie auch ein Erzeugendensystem von U bilden. Dazu sei $a + bT + aT^2 + (a+b)T^3 \in U$. Dann gilt $a + bT + aT^2 + (a+b)T^3 = a(1 + T^2 + T^3) + b(T + T^3)$, somit ist jedes Polynom in U eine Linearkombination der Polynome $1 + T^2 + T^3$ und $T + T^3$. Es folgt, dass $1 + T^2 + T^3, T + T^3$ eine Basis von U ist.

zu Aufgabe 4

1. Sei $m = \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(\mathrm{Kern}(f))$. Mit dem Rangsatz gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f)) = 2m,$$

   somit ist $\dim(V)$ gerade.

2. Sei $V = \mathbb{R}^2$, und sei e_1, e_2 die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch $f(e_1) = e_2$ und $f(e_2) = 0$ definiert wird. Dann ist $e_2, 0$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$, das heißt, e_2 ist eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Mit dem Rangsatz ist $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 1$, und $e_2 \in \mathrm{Kern}(f)$. Es folgt $\mathrm{Kern}(f) = \{ae_2 \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Bild}(f)$.

zu Aufgabe 5

Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^0 = 2$ und $3^1 - 1 = 2$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = 3^n - 1$ für ein $n \geq 1$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} 2 \cdot 3^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^n \\ &= 3^n - 1 + 2 \cdot 3^n \\ &= 3^n(1+2) - 1 \\ &= 3^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

zu Aufgabe 6

1. **Behauptung:** Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{10^n} x^n$ ist für alle x mit $|x| < 10$ konvergent.

   Beweis: Es gilt
   $$\sqrt[n]{\left|\frac{n}{10^n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{n}{10^n}} = \frac{1}{10}\sqrt[n]{n}.$$
   Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, und es folgt
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{10^n}\right|} = \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \frac{1}{10} = \limsup \sqrt[n]{\left|\frac{n}{10^n}\right|}.$$
   Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe 10 ist. Somit konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 10$.

2. **Behauptung:** Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(n+1)!}$ ist konvergent.

   Beweis: Wir verwenden zum Beweis das Quotientenkriterium. Es gilt
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)3^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n3^n} = \frac{n+1}{n(n+2)} \cdot 3.$$
   Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$. Somit gibt es ein $q < 1$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ für fast alle n, und mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergent ist.

zu Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto x - \exp(-x)$.

1. Als Differenz differenzierbarer Funktionen ist f differenzierbar, und es gilt $f'(x) = 1 + \exp(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $\exp(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, folgt, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Somit ist f streng monoton wachsend, und somit injektiv.

2. Es gilt $x = e^{-x}$ genau dann, wenn $f(x) = x - \exp(-x) = 0$ ist. Es sind $f(0) = -1$ und $f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$. Da f als differenzierbare Funktion stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = 0$ gibt. Für dieses x_0 gilt $x_0 = e^{-x_0}$. Da f injektiv ist, gibt es genau ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$, also genau ein $x_0 \in \mathbb{R}$, das die Gleichung $x = e^{-x}$ erfüllt.

zu Aufgabe 8

Mögliche Extremwerte liegen vor, sofern $f'(x) = 0$ ist. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) - (-\sin(x)2\cos(x)) = -\sin(x) + \sin(x)2\cos(x) \\ &= \sin(x)(2\cos(x) - 1). \end{aligned}$$

Genau dann ist $f'(x) = 0$, wenn $\sin(x) = 0$ oder $2\cos(x) - 1 = 0$. Die einzigen Nullstellen von sin in $[0, \pi]$ sind 0 und π.

Genau dann ist $2\cos(x) - 1 = 0$, wenn $\cos(x) = \frac{1}{2}$. Es ist $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, und da cos auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist, folgt, dass $\frac{\pi}{3}$ die einzige Nullstelle von $2\cos(x) - 1$ in $[0, \pi]$ ist. Somit gilt

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \frac{\pi}{3}, \pi\}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - \cos(x) \\ &= 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) - \cos(x). \end{aligned}$$

Einsetzen der Nullstellen von f' liefert

$$\begin{aligned} f''(0) &= 2(1-0) - 1 = 1 > 0 && \Rightarrow \text{ 0 ist lokales Minimum} \\ f''(\tfrac{\pi}{3}) &= 2(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}) - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{3}{2} < 0 && \Rightarrow \tfrac{\pi}{3} \text{ ist lokales Maximum} \\ f''(\pi) &= 2(1-0) + 1 = 3 > 0 && \Rightarrow \pi \text{ ist lokales Minimum.} \end{aligned}$$

zu Aufgabe 9

Es gilt

$$\begin{aligned}
\neg((A \vee B) \wedge (\neg C \vee D)) &\approx \neg(A \vee B) \vee \neg(\neg C \vee D) && \text{De Morgan}\\
&\approx (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg C \vee D) && \text{De Morgan}\\
&\approx (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg C \wedge \neg D) && \text{De Morgan}\\
&\approx (\neg A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D) && \text{Negationsregel.}
\end{aligned}$$

Dann ist $(\neg A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D)$ eine Negationsnormalform der Formel $\neg((A \vee B) \wedge (\neg C \vee D))$.

Mathematische Grundlagen: Klausur vom 29.08.2009

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2009

Klausur am 29.08.2009:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 0$. Dann gilt $\sum\limits_{k=0}^{0} \frac{1}{(k+10)(k+11)} = \frac{1}{10\cdot 11}$ und $\frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{1}{10\cdot 11}$. Somit gilt der Induktionsanfang.

Die Induktionsvoraussetzung ist, dass für ein $n \geq 0$ die Formel $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+10)(k+11)} = \frac{1}{10} + \frac{1}{n+11}$ gilt.

Wir müssen zeigen, dass daraus $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+10)(k+11)} = \frac{1}{10} + \frac{1}{(n+1)+11} = \frac{1}{10} + \frac{1}{n+12}$ folgt.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+10)(k+11)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+10)(k+11)}\right) + \frac{1}{((n+1)+10)((n+1)+11)} \\
&= \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{n+11}\right) + \frac{1}{(n+11)(n+12)} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{n+12}.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Durch die elementaren Zeilenumformungen: Addition der zweiten Zeile zur ersten und Subtraktion der zweiten Zeile von der vierten geht A über in die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Addition der ersten zur dritten Zeile und Subtraktion der vierten Zeile von der dadurch erhaltenen dritten ergibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Vertauschung der zweiten und vierten Zeile und danach Vertauschung der dritten und vierten Zeile erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Durch die Umformungen: Multiplikation der vierten Zeile mit $\frac{1}{2}$ und danach Subtraktion der vierten Zeile von der ersten Zeile erhält man die Einheitsmatrix I_4.

Die Treppennormalform von A ist also die Einheitsmatrix I_4 und damit gilt $\mathrm{Rg}(A) = 4$.

Aufgabe 3

1. Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(A+A') &= f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\ &= (a+a'+b+b') + (a+a'+b+b')T + (a+a'+b+b'+c+c'+d+d')T^2 \\ &= (a+b) + (a+b)T + (a+b+c+d)T^2 \\ &\quad +(a'+b') + (a'+b')T + (a'+b'+c'+d')T^2 \\ &= f(A) + f(A'). \end{aligned}$$

Sei $r \in \mathbb{R}$, und sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(rA) &= f\begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix} \\ &= (ra+rb) + (ra+rb)T + (ra+rb+rc+rd)T^2 \\ &= r((a+b) + (a+b)T + (a+b+c+d)T^2) \\ &= rf(A). \end{aligned}$$

Somit ist f linear.

2. Sei $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ die Standardbasis von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Wir bilden $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + T + T^2$, $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + T + T^2$, $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^2$ und $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^2$.

Da $\left(f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$ ist, und da $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gelten, folgt, dass $(1 + T + T^2, T^2)$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$ ist. Die Polynome $1 + T + T^2$ und T^2 sind keine Vielfachen voneinander, sie sind also linear unabhängig. Somit ist $(1 + T + T^2, T^2)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Aufgabe 4

Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium.

Die Nullmatrix liegt in V, denn $0X_0 = 0$.

Seien $A, B \in V$. Dann gilt $(A+B)X_0 = AX_0 + BX_0 = 0 + 0 = 0$, also $A + B \in V$.

Sei $a \in \mathbb{R}$, und sei $A \in V$. Dann gilt $aAX_0 = a0 = 0$, also $aA \in V$.

Mit dem Unterraumkriterium folgt die Behauptung.

Aufgabe 5

Die Funktion f ist auf dem Intervall $[1, e]$ stetig. Es gilt $f(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 > 0$ und $f(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano gibt es ein $x_0 \in (1, e)$, sodass $f(x_0) = 0$ ist. Somit gibt es mindestens eine Nullstelle von f in $[1, e]$. Die Funktion f ist auch differenzierbar, und es gilt $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ für alle $x \in [1, e]$. Somit ist f im Intervall $[1, e]$ streng monoton fallend und stetig. Es folgt, dass f höchstens eine Nullstelle in $[1, e]$ besitzt. Zusammen folgt, dass f genau eine Nullstelle in $[1, e]$ besitzt.

Aufgabe 6

Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar; daher genügt es, diejenigen Stellen x mit $f'(x) = 0$ zu betrachten. Es gilt

$$f'(x) = (4x - 1)\exp(-x) - (2x^2 - x - 1)\exp(-x) = (-2x^2 + 5x)\exp(-x).$$

Da $\exp(-x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, folgt, dass $f'(x) = 0$ genau dann gilt, wenn $-2x^2+5x = (-2x+5)x = 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x = 0$ oder $x = \frac{5}{2}$ ist.

Die Funktion f' ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f''(x) = (-4x + 5)\exp(-x) - (-2x^2 + 5x)\exp(-x) = (2x^2 - 9x + 5)\exp(-x).$$

Es ist $f''(0) = 5\exp(-x) > 0$ und $f''(\frac{5}{2}) = -5\exp(-x) < 0$. Somit hat f bei $x = 0$ ein lokales Minimum und bei $x = \frac{5}{2}$ ein lokales Maximum.

Aufgabe 7

Die Reihe ist sogar absolut konvergent, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \frac{(n+1)^2(-2)^{-n-1}}{n^2(-2)^{-n}} \right| = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{2} < 1$, folgt aus dem Quotientenkriterium, dass die Reihe konvergent ist.

Aufgabe 8

Zunächst übersetzen wir die Umgangssprache in die Sprache der Aussagenlogik. Dabei verwenden wir folgende Abkürzungen:

p: P ist schuldig.

q: Q ist schuldig.

r: R ist schuldig.

Die Vorermittlungen der Kommissarin ergeben damit:

1. $q \vee r \to \neg p$
2. $\neg p \vee \neg r \to q$
3. $r \to p$

Diese Aussagen müssen wir mit $\wedge$ verknüpfen und überprüfen, unter welchen Voraussetzungen an p, q und r sie sich als wahr herausstellt.

Wir berechnen die Wahrheitstafel für $(q \vee r \to \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg r \to q) \wedge (r \to p)$, wobei wir diese allerdings nur so weit ausfüllen, bis klar ist, was der Wahrheitswert von $(q \vee r \to \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg r \to q) \wedge (r \to p)$ ist.

p	q	r	$q \vee r \to \neg p$	$\neg p \vee \neg r \to q$	$r \to p$	$(q \vee r \to \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg r \to q) \wedge (r \to p)$
1	**1**	**1**	**0**			**0**
1	**0**	**1**	**0**			**0**
1	**1**	**0**	**0**			**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**		**0**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**0**		**0**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**0**		**0**

Damit ist der Fall eindeutig gelöst: Q ist schuldig und P und R sind unschuldig. Andere Möglichkeiten kann es nicht geben.

Aufgabe 9

1. Wir zeigen, dass die Folge monoton fallend und beschränkt ist.

   - **Monotonie:** Wir zeigen mit Induktion, dass $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann gilt $a_2 = \sqrt{88 + 12} = 10 < 88 = a_1$. Der Induktionsanfang ist somit richtig. Die Induktionsannahme ist, dass $a_{n+1} < a_n$ für ein $n \geq 1$ gilt. Dann gilt $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} + 12} < \sqrt{a_n + 12} = a_{n+1}$, denn die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend.

   - **Beschränkt:** Von oben ist (a_n) durch $a_1 = 88$ beschränkt, denn die Folge ist monoton fallend. Wir zeigen mit Induktion, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $a_1 = 88 > 0$, es gilt also der Induktionsanfang. Die Induktionsannahme ist, dass $a_n > 0$ für ein $n \geq 1$ ist. Dann gilt $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12} > \sqrt{12} > 0$. Es folgt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Mit dem Monotonieprinzip folgt, dass (a_n) konvergent ist.

2. Im ersten Teil der Aufgabe haben wir gezeigt, dass (a_n) konvergent ist. Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, und es folgt

$$a^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 12}^2 = \lim_{n\to\infty} (a_n + 12) = a + 12,$$

also $a^2 - a - 12 = 0$. Es folgt $a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+48}$, also $a = 4$ oder $a = -3$. Da der Grenzwert nicht negativ sein kann, denn alle Folgenglieder sind positiv, folgt, dass $a = 4$ ist.

Mathematische Grundlagen: Klausur vom 14.02.2009

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) **WS 2008/09**

Klausur am 14.02.2009:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Wir überprüfen den Induktionsanfang für $n_0 = 1$. Dann gilt $1 \cdot 1! = 1$ und $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$. Somit gilt der Induktionsanfang.

In der Induktionsannahme nehmen wir an, dass $n \geq 1$ und $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1)(n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\
&= (n+1)!(1 + (n+1)) - 1 \\
&= (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Diese Matrix überführen wir in Treppennormalform. Dafür teilen wir die zweite Zeile durch 2:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Jetzt subtrahieren wir die dritte Zeile von der ersten:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Im nächsten Schritt subtrahieren wir die dritte Zeile von der zweiten:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Die Matrix ist jetzt in Treppennormalform. Da die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix gleich sind, besitzt das lineare Gleichungssystem eine Lösung.

Wir fügen nun Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Strichs quadratisch ist und die Pivotpositionen auf der Diagonalen stehen.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rechts des Strichs steht eine spezielle Lösung λ_0 des linearen Gleichungssystems. Jetzt ersetzen wir die Nullen auf der Diagonalen durch -1:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ ist dann

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 3

1. Seien $p = a_0 + a_1T + a_2T^2$ und $q = b_0 + b_1T + b_2T^2$ in V. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(p+q) &= f(a_0 + a_1T + a_2T^2 + b_0 + b_1T + b_2T^2) \\ &= f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)T + (a_2 + b_2)T^2) \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + b_0 + a_1 + b_1 & 2(a_2 + b_2) \\ -a_2 - b_2 & a_1 + b_1 - a_0 - b_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & 2a_2 \\ -a_2 & a_1 - a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 + b_1 & 2b_2 \\ -b_2 & b_1 - b_0 \end{pmatrix} \\ &= f(a_0 + a_1T + a_2T^2) + f(b_0 + b_1T + b_2T^2) = f(p) + f(q). \end{aligned}$$

Seien $p = a_0 + a_1T + a_2T^2$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(ap) &= f(aa_0 + aa_1T + aa_2T^2) = \begin{pmatrix} aa_0 + aa_1 & 2aa_2 \\ -aa_2 & aa_1 - aa_0 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & 2a_2 \\ -a_2 & a_1 - a_0 \end{pmatrix} = af(p). \end{aligned}$$

Es folgt, dass f linear ist.

2. Es ist $(1, T, T^2)$ eine Basis von V. Es gilt $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $f(T^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Damit ist
$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$. Wir überprüfen, ob die Matrizen linear unabhängig sind. Dafür seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2c \\ -c & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Es folgt $c = 0$ und $b - a = 0$, also $b = a$. Aus $a + b = 2a = 0$ folgt $a = 0$, und damit $b = 0$. Somit sind die Matrizen linear unabhängig und bilden daher eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

3. Wir wählen $\mathcal{B} = (1, T, T^2)$ und $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Dann gilt
$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 1 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} - 1 \cdot E_{22} \\ f(T) & = & 1 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 1 \cdot E_{22} \\ f(T^2) & = & 0 \cdot E_{11} + 2 \cdot E_{12} - 1 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22} \end{array}$$
Es folgt ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, also gilt insbesondere $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es folgt $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(-\frac{1}{n})$ und $(\frac{1}{n})$ gegen 0 konvergieren, konvergiert $(\frac{\sin(n)}{n})$, und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

Aufgabe 5

Es gilt
$$f'(x) = -\sin(x) - 2\cos(x)(-\sin(x)) = \sin(x)(2\cos(x) - 1)$$
und
$$\begin{array}{rcl} f''(x) & = & \sin(x)(-2\sin(x)) + (2\cos(x) - 1)\cos(x) = 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) - \cos(x) \\ & = & 2(\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))) - \cos(x) = 4\cos^2(x) - \cos(x) - 2. \end{array}$$
Notwendig für Nullstellen im Inneren ist $f'(x) = 0$. Genau dann ist $f'(x) = 0$, wenn $\sin(x) = 0$ oder $2\cos(x) - 1 = 0$. Im Intervall $[-\pi, \pi]$ ist dies genau dann der Fall, wenn $x = 0, \pi, -\pi$ ist (dann ist $\sin(x) = 0$), oder wenn $x = \pm\frac{\pi}{3}$ ist (dann ist $\cos(x) = \frac{1}{2}$). Es gilt
$$f''(0) = 4 - 1 - 2 = 1 > 0 \text{ und } f''(\pi) = f''(-\pi) = 4 + 1 - 2 = 3 > 0.$$

Somit hat f bei $x = 0, \pi, -\pi$ ein lokales Minimum. Damit sind auch die Stellen am Rand des Definitionsbereichs untersucht. Ferner gilt

$$f''(\frac{\pi}{3}) = f''(-\frac{\pi}{3}) = 4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} < 0.$$

Somit liegt bei $x = \pm\frac{\pi}{3}$ ein lokales Maximum vor.

Aufgabe 6

Sei $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 2^x - x - 3$ für alle $x \in [0,3]$. Es gilt $f(0) = -2 < 0$ und $f(3) = 2^3 - 3 - 3 = 2 > 0$. Da f stetig ist, gibt es mit dem Nullstellensatz von Bolzano ein $x_0 \in [0,3]$ mit $f(x_0) = 0$.

Aufgabe 7

Sei $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = a$. Da alle Folgenglieder positiv sind, ist $a \geq 0$. Wähle $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a_n}{b_n} < c$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt $a_n < cb_n$ für alle $n \geq n_0$. Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent ist, ist auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} cb_n$ konvergent. Damit ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} cb_n$ eine Majorante für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, und es folgt, dass auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent ist.

Aufgabe 8

Wir berechnen das Integral mit partieller Integration. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b \underbrace{x^2}_{=g'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} dx &= \frac{1}{3}x^3 \ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{3}\frac{1}{x}x^3 dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 \ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{x^2}{3} dx \\
&= (\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}x^3)\Big|_a^b
\end{aligned}$$

Aufgabe 9

Sei $U = \mathbb{Z}$ das Universum bei folgenden Interpretationen.

1. Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ sei $P(x,y)$ die Aussage $x = y$. Dann ist die Formel $\forall x \forall y (P(x,y) \to P(y,x)$ wahr, das heißt, es gibt eine Interpretation, für die α wahr ist. Somit ist α nicht widerspruchsvoll.
2. Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ sei $P(x,y)$ die Aussage $x < y$. Dann ist die Formel $\forall x \forall y (P(x,y) \to P(y,x)$ falsch, das heißt, es gibt eine Interpretation, für die α falsch ist. Somit ist α nicht tautologisch.

Mathematatische Grundlagen: Klausur vom 13.02.2010

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) — WS 2010

Klausur am 13.02.2010:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Sei $n_0 = 1$. Dann gilt $\frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Für ein $n \geq 1$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2

Wir schreiben A und die Einheitsmatrix I_3 durch einen Strich getrennt in eine Matrix und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nun überführen wir diese Matrix in Treppennormalform. Dazu addieren wir die erste Zeile zur zweiten:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Jetzt tauschen wir die zweite und die dritte Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Jetzt subtrahieren wir die zweite von der dritten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Wir teilen die dritte Zeile durch 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Zum Schluss subtrahieren wir die dritte Zeile von der ersten:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Rechts des Striches steht die zu A inverse Matrix, also $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

1. Seien $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b'+c+c' & d+d' \\ b+b' & a+a'+d+d' & a+a' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b+c & d \\ b & a+d & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b'+c' & d' \\ b' & a'+d' & a' \end{pmatrix} \\ &= f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b + \lambda c & \lambda d \\ \lambda b & \lambda a + \lambda d & \lambda a \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a & b+c & d \\ b & a+d & a \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass f linear ist.

2. Wir setzen die Standardbasisvektoren von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ in f ein und erhalten

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} &= A_1\\
f\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} &= A_2\\
f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} &= A_3\\
f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} &= A_4.
\end{aligned}$$

Diese Matrizen bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$. Wir zeigen, dass sie linear unabhängig sind. Dazu seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a & b+c & d\\ b & a+d & a\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es folgt $a = d = b = 0$, also $c = 0$. Die Matrizen sind also linear unabhängig und bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$. Somit sind sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

3. Es ist $\dim(\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})) = 4 = \dim(\mathrm{Bild}(f))$. Mit dem Rangsatz gilt

$$\dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Bild}(f)) = 0,$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$. Da f linear ist, folgt, dass f injektiv ist.

Natürlich kann man die Injektivität von f auch direkt nachrechnen.

Aufgabe 4

Es gilt $f(0) = |-1| > 0$ und $f(4) = 3 + 12 - 16 = -1 < 0$.

Als Summe und Verknüpfung stetiger Funktionen ist f stetig. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano folgt, dass f in $[0, 4]$ eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 5

Seien $f(x) = \exp(x) - 1 - x$ und $g(x) = \sin^2(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Die Funktionen f und g sind auf einer Umgebung U von 0 definiert und stetig; somit gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} \sin^2(x) = 0$. Die Funktionen f und g sind differenzierbar mit $f'(x) = \exp(x) - 1$ und $g'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Weiter sind f' und g' auf U definiert und stetig, und es gilt $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$. Ferner sind f' und g' differenzierbar mit $f''(x) = \exp(x)$ und $g''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$. Es ist $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x) = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0} 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 2$ (aufgrund der Stetigkeit von f'' und g''). Damit existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$. Mit der Regel von de

l'Hospital folgt

$$\frac{1}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x)}{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1 - x}{\sin^2(x)}.$$

Aufgabe 6

1. Wir verwenden zur Berechnung den Satz von Cauchy-Hadamard. Dazu zeigen wir zunächst, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ existiert. Es ist $\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}$. Die Folge $(\sqrt[n]{n})$ konvergiert laut Studienbrief gegen 1, und da die Wurzelfunktion stetig ist, konvergiert $(\sqrt{\sqrt[n]{n}})$ gegen $\sqrt{1} = 1$. Es folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ ist. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe 1, also das Konvergenzintervall $(-1, 1)$ ist.
2. Für $x = 1$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Für alle $n \geq 1$ ist $\sqrt{n} \leq n$, also $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$. Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist, folgt, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent ist, denn die Folgen beider Partialsummen sind unbeschränkt. Somit folgt, dass die Potenzreihe für $x = 1$ divergent ist.

   Für $x = -1$ gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Da $(\sqrt{n})$ monoton wachsend und unbeschränkt ist, ist $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ eine monoton fallende Nullfolge. Es folgt mit dem Leibniz-Kriterium, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergent ist. Somit ist die Potenzreihe für $x = -1$ konvergent.

Aufgabe 7

Gegeben sind Atome A, B, C, D. Als Prämissen sind

1. $A \to C \vee \neg D$
2. $B \vee C \to D$
3. $A \wedge B$

gegeben, aus denen mittels eines formalen Beweises nachgewiesen wird, dass dann C gilt:

1.	$A \to C \vee \neg D$	Prämisse
2.	$B \vee C \to D$	Prämisse
3.	$A \wedge B$	Prämisse
4.	B	3., Vereinfachung
5.	$B \vee C$	4., Ausdehnung
6.	D	5., 2., Modus ponens
7.	A	3., Vereinfachung
8.	$C \vee \neg D$	7., 1., Modus ponens
9.	$\neg D \vee C$	8., Kommutativgesetz
10.	$D \to C$	9., Implikation
11.	C	6., 10., Modus ponens

Damit ist gezeigt, dass unter den genannten Prämissen die Aussage C gilt.

Aufgabe 8

1. Da $a_n > \sqrt{x_0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Folge (a_n) nach unten beschränkt. Es gilt $1 + a_n > 0$ sowie $a_n^2 > x_0$, also $-a_n^2 < -x_0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist damit

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \tfrac{x_0+a_n}{1+a_n} - a_n = \tfrac{x_0+a_n}{(1+a_n)} - \tfrac{(1+a_n)a_n}{(1+a_n)} \\ &= \tfrac{x_0+a_n-a_n-a_n^2}{1+a_n} = \tfrac{x_0-a_n^2}{1+a_n} < \tfrac{x_0-x_0}{1+a_n} = 0. \end{aligned}$$

   Es folgt $a_{n+1} < a_n$. Damit ist die Folge streng monoton fallend, also auch nach oben beschränkt. Mit dem Monotonieprinzip ist die Folge konvergent.

2. Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Da $a_n > \sqrt{x_0} > 0$ ist, folgt $a \geq \sqrt{x_0} > 0$. Mit der unter 1. gezeigten Konvergenz folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_0 + \lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{x_0 + a}{1 + a},$$

   also $a = \frac{x_0+a}{1+a}$, somit $a + a^2 = x_0 + a$, und damit $a^2 = x_0$. Es folgt $a = \sqrt{x_0}$, denn $a > 0$.

Mathematatische Grundlagen: Klausur vom 28.08.2010

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) **SoSe 2010**

Klausur am 28.08.2010:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Sei $n_0 = 1$. Es gilt $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1 = \frac{1\cdot(1+1)(1+2)}{6}$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ für ein $n \geq 1$ gilt.

Im Induktionsschritt untersuchen wir, ob aus dieser Annahme folgt, dass $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(k+1)}{2} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}\right) + \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ mit Induktionsannahme und Vereinfachen} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2

Es ist Kern(f) die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Um diese zu berechnen, überführen wir A in Treppennormalform. Dazu subtrahieren wir die erste Zeile von der zweiten, addieren die vierte Zeile zur dritten, und subtrahieren dann das Vierfache der ersten Zeile von der vierten. Das liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 14 & -4 \end{pmatrix}.$$

Jetzt addieren wir die zweite Zeile zur dritten und subtrahieren das Doppelte der zweiten Zeile von der vierten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir teilen die zweite Zeile durch 7 und addieren dann das Vierfache der zweiten Zeile zur ersten. Damit erhalten wir die Treppennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Algorithmus aus dem Skript folgt, dass $\text{Kern}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Eine Basis von $\text{Kern}(f)$ ist $\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -1 \end{pmatrix}$.

Es ist $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$, also $\dim(\text{Bild}(f)) = 2$.

Wir berechnen $Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Diese Vektoren sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander. Da $\dim(\text{Bild}(f)) = 2$ ist, bilden sie eine Basis von $\dim(\text{Bild}(f))$.

Aufgabe 3

Seien $\sum\limits_{i=0}^{2} a_i T^i$ und $\sum\limits_{i=0}^{2} b_i T^i$ in V. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(\sum_{i=0}^{2} a_i T^i + \sum_{i=0}^{2} b_i T^i) &= f(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) T^i) \\
&= \begin{pmatrix} a_0 + b_0 & a_0 + b_0 + a_1 + b_1 \\ a_1 + b_1 + a_2 + b_2 & a_0 + b_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_0 & a_0 + a_1 \\ a_1 + a_2 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 & b_0 + b_1 \\ b_1 + b_2 & b_0 \end{pmatrix} \\
&= f(\sum_{i=0}^{2} a_i T^i) + f(\sum_{i=0}^{2} b_i T^i)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f(a \sum_{i=0}^{2} a_i T^i) &= f(\sum_{i=0}^{2} a a_i T^i) = \begin{pmatrix} aa_0 & aa_0 + aa_1 \\ aa_1 + aa_2 & aa_0 \end{pmatrix} \\
&= a \begin{pmatrix} a_0 & a_0 + a_1 \\ a_1 + a_2 & a_0 \end{pmatrix} = af(\sum_{i=0}^{2} a_i T^i).
\end{aligned}$$

Es folgt, dass f linear ist.

Aufgabe 4

Wenn alle $a_i = 0$ sind, dann ist auch $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$. Nehmen wir nun an, dass nicht alle $a_i = 0$ sind und dass $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ ist. Wir müssen zeigen, dass es keinen Index k, $1 \leq k \leq n$,

gibt, sodass $a_k = 0$ ist. Angenommen, es gibt einen Index k mit $a_k = 0$. Nach Annahme sind $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$ linear unabhängig. Da $0 = \sum_{i=1}^{k-1} a_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i$ ist, folgt, dass die Skalare $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ Null sein müssen. Es folgt also $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq 0$. Aber das hatten wir ausgeschlossen. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keinen Index k, $1 \leq k \leq n$, mit $a_k = 0$ gibt, also alle Koeffizienten $\neq 0$ sind.

Aufgabe 5

Es gilt $f(0) = \cos(0) - \exp(0) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 > 0$ und $f(\frac{1}{100}) = \cos(2) - \exp(\frac{1}{100}) + 1 < 0$, denn $\cos(2) < 0$ und $\exp(\frac{1}{100}) > \exp(0) = 1$, da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist.

Als Summe stetiger Funktionen ist f stetig. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano folgt, dass f in $[0, \frac{1}{100}]$ eine Nullstelle besitzt.

Die Funktion f ist als Summe differenzierbarer Funktionen auch differenzierbar, und es gilt $f'(x) = -200\sin(200x) - \exp(x) < 0$ für $x \in [0, \frac{1}{100}]$, denn $\sin(y) \geq 0$ für $y \in [0, 2] \subseteq [0, \pi]$ und $\exp(x) > 0$. Also ist f streng monoton fallend auf $[0, \frac{1}{100}]$. Es folgt, dass f genau eine Nullstelle in $[0, \frac{1}{100}]$ besitzt.

Aufgabe 6

Es ist $f(x) = \cos(\frac{x}{2})\sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, also

$$f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

denn $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Es ist $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})\sin(x) + \cos(\frac{x}{2})\cos(x)$, also

$$f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

denn $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Weiter ist $f''(x) = -\frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2})\sin(x) - \sin(\frac{x}{2})\cos(x) - \cos(\frac{x}{2})\sin(x) = -\frac{5}{4}\cos(\frac{x}{2})\sin(x) - \sin(\frac{x}{2})\cos(x)$, also

$$f''(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{5}{4\sqrt{2}}.$$

Es folgt

$$P_{2,\frac{\pi}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{2}) - \frac{5}{8\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{2})^2.$$

Aufgabe 7

Wir zeigen, dass die Reihe divergent ist. Sei $a_n = \sqrt[n]{3}$. Es ist $a_n = 3^{\frac{1}{n}}$. Die Folge $(\frac{1}{n})$ ist eine Nullfolge. Da die allgemeine Potenzfunktion stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 3^0 = 1,$$

und damit ist (a_n) keine Nullfolge. Es folgt, dass die Reihe divergent ist.

Aufgabe 8

Seien A, B Atome und $\alpha = A \to B$, $\beta = \neg A \to \neg B$, $\gamma = \neg(A \wedge B)$ damit gebildete Formeln.

1. Für die Konjunktion der Formeln α, β und γ gilt:

$$\begin{array}{lll} & \alpha \wedge \beta \wedge \gamma & \text{Konjunktion der Formeln} \\ \approx & (A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B) \wedge \neg(A \wedge B) & \text{Implikationen ersetzen} \\ \approx & (\neg A \vee B) \wedge (\neg(\neg A) \vee \neg B) \wedge \neg(A \wedge B) & \text{Doppelte Negation} \\ \approx & (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge \neg(A \wedge B) & \text{De Morgan} \\ \approx & (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B) & \text{Konjunkive Normalform,} \\ & & \text{Distributivgesetz} \\ \approx & (\neg A \vee B) \wedge ((A \wedge \neg A) \vee \neg B) & \text{Äquivalenzen A1 und A2} \\ \approx & (\neg A \vee B) \wedge \neg B & \text{Distributivgesetz} \\ \approx & (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B) & \text{Äquivalenzen A1 und A2} \\ \approx & \neg A \wedge \neg B & \text{Negationsnormalform} \end{array}$$

   mit den beiden Äquivalenzen A1 und A2, die für jede Formel σ gelten:

   A1 $\sigma \wedge \neg\sigma \approx \mathbf{0}$,

   A2 $\sigma \vee \mathbf{0} \approx \mathbf{0} \vee \sigma \approx \sigma$.

2. Sei $\mathfrak{I}$ eine Bewertung der Formeln, welche mit den Atomen A und B gebildet werden können. Wenn gemäß der Voraussetzung $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta) = \mathfrak{I}(\gamma) = 1$ ist, gilt aufgrund der gezeigten Äquivalenz $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \approx \neg A \wedge \neg B$, dass $\mathfrak{I}(\neg A \wedge \neg B) = \mathfrak{I}(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) = 1$ ist. Da einer Konjunktion von Formeln nur dann der Wert 1 zugeordnet wird, wenn allen Formeln der Wert 1 zugeordnet ist, folgt $\mathfrak{I}(\neg A) = \mathfrak{I}(\neg B) = 1$. Mit der Definition für die Negation ergibt sich $\mathfrak{I}(A) = 0$ und $\mathfrak{I}(B) = 0$.

Aufgabe 9

1. Wir zeigen, dass (a_n) monoton fallend und beschränkt ist. Mit dem Monotonieprinzip folgt dann die Konvergenz von (a_n).

   Wir beweisen mit Induktion nach n, dass $a_n \geq 2$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $a_1 = 3$ ist, gilt der Induktionsanfang. Sei $a_n \geq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} - 2 = \frac{a_n^2 - 4a_n + 4}{2a_n} = \frac{(a_n - 2)^2}{2a_n} \geq 0,$$

   denn es sind $(a_n - 2)^2 \geq 0$ und $a_n \geq 2 > 0$ nach Induktionsvoraussetzung. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Wir zeigen nun, dass (a_n) monoton fallend ist. Da $a_n \geq 2$ ist, folgt $\frac{2}{a_n} \leq 1$, also $\frac{a_n}{2} \geq 1 \geq \frac{2}{a_n}$, und damit

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n.$$

Damit ist (a_n) nach oben durch 3 und nach unten durch 2 beschränkt und monoton fallend. Es folgt, dass (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergent ist.

2. Da alle Folgenglieder ≥ 2 sind, ist $a \geq 2$.

   Da (a_n) gegen $a \neq 0$ konvergiert, konvergieren auch $(\frac{a_n}{2})$ und $(\frac{2}{a_n})$, und zwar gegen $\frac{a}{2}$ beziehungsweise gegen $\frac{2}{a}$. Es folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{a_n} = \frac{a}{2} + \frac{2}{a} = \frac{a^4 + 4}{2a}.$$

   Es folgt $2a^2 = a^2 + 4$, also $a^2 = 4$ und damit $a = 2$, denn $a \geq 2$.

Mathematische Grundlagen: Klausur vom 26.03.2011

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) WS 2010/11

Klausur am 26.03.2011:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Sei $n_0 = 2$. Dann gilt $2^2 = 4$ und $2 + 1 = 3$, also $2^2 > 2 + 1$, der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Für ein $n \geq 2$ gilt $n^2 > n + 1$.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist

$$n^2 > n + 1 \Rightarrow (n + 1)^2 > n + 2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 > (n + 1) + 2n + 1 \text{ (Induktionsannahme)}\\ &\geq (n + 1) + 5, \text{ da } n \geq 2\\ &> n + 2.\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass $n^2 > n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt.

Aufgabe 2

Wir schreiben A und die 3×3-Einheitsmatrix in eine Matrix und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt überführen wir diese Matrix in Treppennormalform. Dazu subtrahieren wir das a-Fache der zweiten Zeile von der ersten und addieren das c-Fache der dritten Zeile zur zweiten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b-ac & | & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt addieren wir das $(b - ac)$-Fache der dritten Zeile zur ersten und multiplizieren dass die dritte Zeile mit -1. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -a & b-ac \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rechts des Striches steht die zu A inverse Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & b-ac \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

1. Wir verwenden zum Beweis das Unterraumkriterium. Die $n \times n$-Nullmatrix liegt in V_n, denn die Summe der Diagonaleinträge ist 0. Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ in

V_n. Dann gilt $\mathrm{Spur}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B) = 0+0 = 0$, also gilt $A+B \in V_n$. Sei $a \in \mathbb{K}$ und $A = (a_{ij}) \in V_n$. Dann gilt $\mathrm{Spur}(aA) = \sum_{i=1}^{n} aa_{ii} = a\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a\mathrm{Spur}(A) = a \cdot 0 = 0$. Es folgt $aA \in V_n$. Mit dem Unterraumkriterium ist V_n ein Unterraum von $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

2. Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die Matrizen A, B und C liegen in V_2. Wir zeigen, dass (A, B, C) eine Basis von V_2 ist. Dazu seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit

$$aA + bB + cC = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a \\ b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt $a = b = c = 0$, und somit sind A, B und C linear unabhängig.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V_2$. Dann gilt $\mathrm{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} = 0$, also $a_{22} = -a_{11}$. Es folgt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}C + a_{12}A + a_{21}B.$$

Somit ist (A, B, C) auch ein Erzeugendensystem von V_2, und es folgt, dass (A, B, C) eine Basis von V_2 ist.

Aufgabe 4

1. Seien $v, w \in V$. Dann gilt $f_{a_0}(v+w) = a_0(v+w) = a_0v + a_0w = f_{a_0}(v) + f_{a_0}(w)$. Sei $v \in V$ und $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt $f_{a_0}(av) = a_0av = aa_0v = af_{a_0}(v)$. Es folgt, dass f_{a_0} linear ist.

2. Ist $a_0 \neq 0$, so ist a_0 invertierbar, und es ist auch f_{a_0} invertierbar, denn $f_{a_0^{-1}}$ ist die zu f_{a_0} inverse Abbildung. Damit ist f_{a_0} ein Isomorphismus. Da ein Isomorphismus Basen auf Basen abbildet, gilt $\dim(\mathrm{Bild}(f_{a_0})) = \dim(V)$. Es folgt $\dim(\mathrm{Kern}(f_{a_0})) = 0$. Ist $a_0 = 0$, so ist f_{a_0} die Nullabbildung, also $V = \mathrm{Kern}(f_{a_0})$.
Dann ist $\dim(\mathrm{Kern}(f_{a_0})) = \dim(V)$ und $\dim(\mathrm{Bild}(f_{a_0})) = 0$.

Aufgabe 5

Es sind $\lim\limits_{x\to 3}(x^3 - 27) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 3}(x-3) = 0$, denn die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 27$ und $g(x) = x - 3$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und als Polynomfunktionen differenzierbar mit stetiger Ableitung. Es sind $\lim\limits_{x\to 3} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3} 3x^2 = 27$ und $\lim\limits_{x\to 3} g'(x) = \lim\limits_{x\to 3} 1 = 1$. Somit existiert $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ und ist 27. Es folgt $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = 27$ mit der Regel von de l'Hospital.

Aufgabe 6

Für alle $x \in (0,1)$ ist $x(1-x) > 0$, also $\sqrt{x(1-x)} > 0$. Ferner sind $f(0) = 0 = f(1)$. Somit liegen für $x = 0$ und $x = 1$ Minima vor. Wir untersuchen die Funktion jetzt auf dem offenen Intervall $(0,1)$ auf Extrema. Die Funktion f ist differenzierbar und wir bilden mit der Kettenregel die erste Ableitung von f. Es ist

$$f'(x) = (1-2x)\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Ein Extremum kann nur dann in $x_0 \in (0,1)$ vorliegen, wenn $f'(x_0) = 0$ ist. Wir untersuchen also die Funktion auf Nullstellen in $(0,1)$. Es ist

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x_0}{2\sqrt{x_0 - x_0^2}} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

Im Prinzip sind wir jetzt schon fertig. Die Funktion f ist auf $[0,1]$ stetig, es gilt $f(x) = 0$ für $x = 0$ beziehungsweise $x = 1$, und es ist $f(x) > 0$ für alle $x \in (0,1)$. Dann kann f nicht monoton wachsend sein, muss also ein Maximum auf $(0,1)$ besitzen. Dies kann nur für $x = \frac{1}{2}$ vorliegen, denn $x = \frac{1}{2}$ ist die einzige Nullstelle von f'.

Wir können aber auch die zweite Ableitung betrachten. Wir stellen fest, dass f' differenzierbar ist und berechnen f'' mit der Quotientenregel:

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{x-x^2} - (1-2x)\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}}{x-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{x-x^2} - \frac{(1-2x)^2}{2\sqrt{x-x^2}}}{x-x^2}.$$

In die zweite Ableitung setzen wir jetzt $x_0 = \frac{1}{2}$ ein und erhalten

$$f''(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} < 0.$$

Es folgt, dass in $x_0 = \frac{1}{2}$ ein Maximum von f vorliegt.

Aufgabe 7

Wir betrachten zunächst die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ ist im Wesentlichen eine geometrische Reihe; nur, dass hier die Summation bei 1 und nicht bei 0 beginnt. Es ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}) - (\frac{1}{3})^0 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Jetzt untersuchen wir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

und mit dieser Gleichung lässt sich die n-te Partialsumme s_n dieser Reihe leicht berechnen. Es gilt nämlich

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

denn der negative Term in der Klammer hebt sich durch den positiven Term in der folgenden Klammer weg, und es überleben nur der erste und der letzte Term. Die Folge $(s_n) = (1 - \frac{1}{n+1})$ ist konvergent, und es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}(s_n) = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1 - 0 = 1.$$

Somit gilt

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n(n+1)}).$$

Aufgabe 8

Wir zeigen, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{17^n}$ konvergiert und verwenden zum Beweis das Quotientenkriterium. Dazu müssen wir den $(n+1)$-ten Summanden $a_{n+1} = \frac{n+1}{17^{n+1}}$ durch den n-ten Summanden $a_n = \frac{n}{17^n}$ teilen. Wir erhalten

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+1}{17^{n+1}}}{\frac{n}{17^n}}\right| = \frac{n+1}{17^{n+1}} \cdot \frac{17^n}{n} = \frac{n+1}{17n}.$$

Die Folge $(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|) = (\frac{n+1}{17n})$ ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{17n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1+\frac{1}{n}}{17}) = \frac{1}{17} < 1.$$

Da der Grenzwert kleiner als 1 ist, folgt, dass die Reihe konvergiert.

Aufgabe 9

Die gegebene Formel wird mittels Äquivalenzumformungen in eine Negations- und diese dann in eine disjunktive Normalform mit möglichst wenig Konjunktionen überführt; hierzu werden auch die vereinbarten Äquivalenzen $\alpha \vee \neg\alpha \approx \mathbf{1}$ (V1) und $\beta \wedge \mathbf{1} \approx \beta$ (V2) für Formeln

α und β verwendet (siehe Vereinbarung 20.1.29 in der Kurseinheit 7):

	$\neg(A \vee \neg C \to \neg B) \vee (C \wedge B \to D)$	Implikationen ersetzen
$\approx$	$\neg(\neg(A \vee \neg C) \vee \neg B) \vee (\neg(C \wedge B) \vee D)$	De Morgan
$\approx$	$(\neg\neg(A \vee \neg C) \wedge \neg\neg B) \vee (\neg(C \wedge B) \vee D)$	Doppelte Negationen
$\approx$	$((A \vee \neg C) \wedge B) \vee (\neg(C \wedge B) \vee D)$	De Morgan
$\approx$	$((A \vee \neg C) \wedge B) \vee ((\neg C \vee \neg B) \vee D)$	**Negationsnormalform**, Distributivgesetz
$\approx$	$(A \wedge B) \vee (\neg C \wedge B) \vee ((\neg C \vee \neg B) \vee D)$	Klammern
$\approx$	$(A \wedge B) \vee (\neg C \wedge B) \vee \neg C \vee \neg B \vee D$	**Disjunktive Normalform**, Kommutativgesetz
$\approx$	$(A \wedge B) \vee (\neg C \wedge B) \vee \neg B \vee \neg C \vee D$	Distributivgesetz
$\approx$	$(A \wedge B) \vee [(\neg C \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg B)] \vee \neg C \vee D$	(V1)
$\approx$	$(A \wedge B) \vee [(\neg C \vee \neg B) \wedge \mathbf{1}] \vee \neg C \vee D$	(V2)
$\approx$	$(A \wedge B) \vee (\neg C \vee \neg B) \vee \neg C \vee D$	Kommutativgesetz
$\approx$	$(A \wedge B) \vee (\neg B \vee \neg C) \vee \neg C \vee D$	Assoziativgesetz
$\approx$	$(A \wedge B) \vee \neg B \vee (\neg C \vee \neg C) \vee D$	Idempotenzregel
$\approx$	$(A \wedge B) \vee \neg B \vee \neg C \vee D$	Distributivgesetz
$\approx$	$[(A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg B)] \vee \neg C \vee D$	(V1)
$\approx$	$[(A \vee \neg B) \wedge \mathbf{1}] \vee \neg C \vee D$	(V2)
$\approx$	$(A \vee \neg B) \vee \neg C \vee D$	Klammern
$\approx$	$A \vee \neg B \vee \neg C \vee D$	**Disjunktive Normalform ohne Konjunktion**

Mathematische Grundlagen: Klausur vom 24.09.2011

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2011

Klausur am 24.09.2011:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $A^{n_0} = A$, und $\begin{pmatrix} 1 & n_0 & \frac{n_0(n_0-1)}{2} \\ 0 & 1 & n_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$. Es gilt also der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $n \geq 1$ gilt.

Wir werden im Induktionsschritt zeigen, dass daraus $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt.

Es gilt

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$ ist. Das gilt aber, denn

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Aufgabe 2

1. Durch die elementaren Zeilenumformungen: Addition der zweiten Zeile zur ersten und Subtraktion der zweiten Zeile von der vierten (= Addition der (-1)-fachen der zweiten Zeile zur vierten) geht A über in die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Addition der ersten zur dritten Zeile und Subtraktion der vierten Zeile von der dritten ergibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Vertauschung der zweiten und vierten Zeile und danach Vertauschung der dritten und vierten Zeile erhält man die Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+1 \end{pmatrix}.$$

In $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $1 + 1 = 2 \neq 0$. Durch die Umformungen: Multiplikation der vierten Zeile mit $\frac{1}{2}$ und danach Subtraktion der vierten Zeile von der ersten Zeile erhält man die Einheitsmatrix I_4.

Die Treppennormalform von A ist also die Einheitsmatrix I_4 und damit gilt $\text{Rg}(A) = 4$.

2. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ kann man die oben angegebenen Umformungen analog durchführen, bis man zur Matrix A' gelangt. Da $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_2$ ist, ist man dann an dieser Stelle fertig. Die Treppennormalform von A lautet dann

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und folglich ist $\text{Rg}(A) = 3$.

Aufgabe 3

Sei $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}$. Dann ist U als Lösungsmenge des honogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ mit $A = (1111)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Die Matrix A ist bereits in Treppennormalform und hat den Rang 1. Deshalb gilt $\dim(U) = 4 - 1 = 3$. Für die Vektoren der Standardbasis gilt jeweils $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, daher liegen sie nicht in U.

Aufgabe 4

Sei $x \in \text{Kern}(f) \cap \text{Kern}(g)$. Dann ist $f(x) = 0 = g(x)$. Es folgt $0 = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$, also $x \in \text{Kern}(f + g)$. Es folgt $\text{Kern}(f) \cap \text{Kern}(g) \subseteq \text{Kern}(f + g)$, die Behauptung.

Aufgabe 5

Wir zeigen, dass die Folge monoton fallend und beschränkt ist. Damit ist bewiesen, dass

sie konvergent ist. Für die Monotonie berechnen wir $a_{n+1} - a_n$. Es gilt

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \tfrac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \tfrac{1}{kl} \\
&= \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{2n+1} + \tfrac{1}{2n+2} \right) - \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{n} \right) \\
&= \tfrac{1}{2n+1} + \tfrac{1}{2n+2} - \tfrac{1}{n} \\
&= \left(\tfrac{1}{2n+1} - \tfrac{1}{2n} \right) + \left(\tfrac{1}{2n+2} - \tfrac{1}{2n} \right) < 0.
\end{aligned}$$

Somit ist (a_n) monoton fallend. Nach oben ist (a_n) durch a_1 beschränkt, und da alle Folgenglieder positiv ist, ist (a_n) durch 0 nach unten beschränkt. Es folgt die Konvergenz der Folge.

Aufgabe 6

1. Es ist $\sqrt[3]{(\sin(2x))^2} = (\sin(2x)^2)^{\frac{1}{3}} = \sin(2x)^{\frac{2}{3}}$ also $f(x) = \sin(2x)^{\frac{2}{3}}$. Diese Funktion leiten wir mit der Kettenregel ab:

$$f'(x) = (\sin(2x))' \cdot \frac{2}{3} \cdot \sin(2x)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \frac{(\sin(2x))'}{\sqrt[3]{\sin(2x)}}.$$

   Die Ableitung $(\sin(2x))'$ wird wieder mit der Kettenregel berechnet. Es ist $(\sin(2x))' = 2 \cdot \cos(2x)$, also

$$f'(x) = \frac{4}{3} \frac{\cos(2x)}{\sqrt[3]{\sin(2x)}}.$$

2. Wir verwenden zur Berechnung partielle Integration, also die Formel $\int\limits_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = f(x)g(x) \mid_a^b - \int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$. Dafür sei $f'(x) = \cos(x)$ und $g(x) = x^2$, also $f(x) = \sin(x)$ und $g'(x) = 2x$. Es folgt

$$\int\limits_a^b x^2 \cdot \cos(x) dx = \sin(x) \cdot x^2 \mid_a^b - \int\limits_a^b 2x \cdot \sin(x) dx = \sin(x) \cdot x^2 \mid_a^b -2 \int\limits_a^b x \cdot \sin(x) dx.$$

   Zur Berechnung von $\int\limits_a^b x \cdot \sin(x) dx$ verwenden wir wieder partielle Integration, und zwar jetzt mit $f'(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$, also $f(x) = -\cos(x)$ und $g'(x) = 1$. Es folgt

$$\int\limits_a^b x \cdot \sin(x) dx = (-\cos(x)) \cdot x \mid_a^b - \int\limits_a^b (-\cos(x)) dx = -x \cdot \cos(x) \mid_a^b + \int\limits_a^b \cos(x) dx.$$

   Jetzt verwenden wir, dass sin eine Stammfunktion von cos ist, und es folgt

$$\int\limits_a^b x^2 \cos(x) dx = (x^2 \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2\sin(x)) \mid_a^b .$$

Aufgabe 7

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $a_n = \frac{n}{n+1}x^n$. Es gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\frac{n+1}{n+2}x^{n+1}|}{|\frac{n}{n+1}x^n|} = |x|\frac{n+1}{n+2}\frac{n+1}{n} = |x|\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}.$$

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} |x|\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = |x|$. Für $|x| < 1$ konvergiert damit die Reihe, und für $|x| > 1$ divergiert sie. Die Folgen $(\frac{n}{n+1})$ und $((-1)^n \cdot \frac{n}{n+1})$ sind keine Nullfolgen, und es folgt, dass die Reihen für $x = 1$ und $x = -1$ divergieren.

Aufgabe 8

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Die Funktion $f : (0, \infty \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax - \sqrt{x}$ ist differenzierbar, und es ist

$$f'(x) = a - \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ für } x > 0.$$

Es folgt $f'(x) = 0$, falls $x = \frac{1}{4a^2}$, und $f'(x) < 0$, falls $0 < x < \frac{1}{4a^2}$, und $f'(x) > 0$, falls $x > \frac{1}{4a^2}$ ist. Somit ist f auf $(0, \frac{1}{4a^2})$ streng monoton fallend, und auf $(\frac{1}{4a^2}, \infty)$ streng monoton wachsend. Die einzige Nullstelle von f' ist $x_0 = \frac{1}{4a^2}$. Da f in $(0, \frac{1}{4a^2})$ streng monoton fällt und in $(\frac{1}{4a^2}, \infty)$ streng monoton wächst, liegt hier ein Minimum vor.

Aufgabe 9

Die gegebene Formel wird mittels Äquivalenzumformungen in eine Negations- und diese dann in eine pränexe Normalform überführt:

$$\begin{array}{lll}
 & \neg\exists x(\forall y P(y,x) \to \exists y Q(y,c)) & \text{Umbenennung} \\
\approx & \neg\exists x(\forall y P(y,x) \to \exists z Q(z,c)) & \text{Implikation} \\
\approx & \neg\exists x(\neg(\forall y P(y,x)) \lor \exists z Q(z,c)) & \text{Quantorwechsel} \\
\approx & \forall x\neg(\neg(\forall y P(y,x)) \lor \exists z Q(z,c)) & \text{De Morgan} \\
\approx & \forall x(\neg\neg(\forall y P(y,x)) \land \neg\exists z Q(z,c)) & \text{Doppelte Negation} \\
\approx & \forall x(\forall y P(y,x) \land \neg\exists z Q(z,c)) & \text{Quantorwechsel} \\
\approx & \forall x(\forall y P(y,x) \land \forall z\neg Q(z,c)) & \text{Negationsnormalform,} \\
 & & \text{Quantifizierung} \\
\approx & \forall x(\forall y(P(y,x) \land \forall z\neg Q(z,c))) & \text{Kommutativgesetz} \\
\approx & \forall x(\forall y(\forall z\neg Q(z,c) \land P(y,x))) & \text{Quantifizierung} \\
\approx & \forall x(\forall y(\forall z(\neg Q(z,c) \land P(y,x)))) & \text{Klammern} \\
\approx & \forall x\forall y\forall z(\neg Q(z,c) \land P(y,x)) & \text{pränexe Normalform}
\end{array}$$

Mathematische Grundlagen: Klausur vom 22.09.2012

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Klausur am 22.09.2012:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Wir beweisen die Behauptung mit Induktion nach n. Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{2n_0-1}(-1)^{k+1}k^2 = \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}k^2 = (-1)^2\cdot 1^2 = 1 = 1\cdot(2-1) = n_0(2n_0-1).$$

Somit gilt der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k^2 = n(2n-1)$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $\sum_{k=1}^{2(n+1)-1}(-1)^{k+1}k^2 = (n+1)(2(n+1)-1)$, also $\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}k^2 = (n+1)(2n+1) = 2n^2+3n+1$ ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}k^2 &= \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k^2 + (-1)^{2n+1}(2n)^2 + (-1)^{2n+2}(2n+1)^2 \\
&\quad \text{(Abspalten der letzten beiden Summanden)} \\
&= \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k^2 - (2n)^2 + (2n+1)^2 \\
&\quad \text{(denn } 2n+1 \text{ ist ungerade und } 2n+2 \text{ ist gerade)} \\
&= n(2n-1) - 4n^2 + 4n^2 + 4n + 1 \text{ (Induktionsannahme und Ausmultiplizieren)} \\
&= 2n^2+3n+1 = (n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & | & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren die erste Zeile von der dritten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

und die zweite von der vierten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & | & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir addieren die dritte Zeile zur vierten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun addieren wir das Doppelte der dritten Zeile zur ersten und zur zweiten Zeile, multiplizieren die dritte Zeile mit -1 und erhalten die Treppennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 9 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Wir fügen Nullzeilen und -1'en ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 9 & | & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Von dieser Matrix lesen wir die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 3

Um zu zeigen, dass U ein Unterraum von $C[a,b]$ ist, benutzen wir das Unterraumkriterium. Für $\hat{0}$, das Nullelement von $C[a,b]$, gilt $\int\limits_a^b \hat{0}dx = 0$, also gilt $\hat{0} \in U$. Seien weiter $f, g \in U$, also $\int\limits_a^b f(x)dx = 0 = \int\limits_a^b g(x)dx$. Dann ist $\int\limits_a^b (f+g)(x)dx = \int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx = 0 + 0 = 0$. Also folgt $f + g \in U$. Sei nun $f \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $\int\limits_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx = \lambda \cdot 0 = 0$, also $\lambda f \in U$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von $C[a,b]$ ist.

Aufgabe 4

Da v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind, gibt es $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ mit

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0, \text{ also } -\gamma v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2,$$

und nicht alle drei Körperelemente α, β, γ sind 0. Angenommen, es gilt $\gamma = 0$. Dann wäre $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$, und mindestens eins der Körperelemente α, β ist ungleich 0. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind. Es gilt also $\gamma \neq 0$, und die Gleichung $-\gamma v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$ kann durch $-\gamma$ geteilt werden. Es folgt $v_3 = -\frac{\alpha}{\gamma} v_1 + (-\frac{\beta}{\gamma}) v_2$, und mit $a = -\frac{\alpha}{\gamma}$ und $b = -\frac{\beta}{\gamma}$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 5

1. Sei $p = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 \in V$ mit $f(p) = (a_0, -a_1, a_2, a_0 + a_1 + a_2) = (0,0,0,0)$. Ein Vergleich der ersten drei Komponenten liefert sofort, dass $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, also $p = 0$, gilt. Damit ist $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ mit Basis $\emptyset$.

   Da $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ gilt, ist f injektiv. Also werden linear unabhängige Vektoren aus V auf linear unabhängige Vektoren in $M_{14}(\mathbb{R})$ abgebildet. Die Bilder der kanonischen Basis $(1, T, T^2)$ sind dann also linear unabhängig. Da sie außerdem ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$ bilden, sind sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Also ist

   $$f(1) = (1,0,0,1), f(T) = (0,-1,0,1), f(T^2) = (0,0,1,1)$$

   eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

2. Wir berechnen

   $$\begin{aligned} f(1) &= (1,0,0,1) = 1 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1,0) + 1 \cdot (0,0,0,1) \\ f(T) &= (0,-1,0,1) = 0 \cdot (1,0,0,0) + (-1) \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1,0) + 1 \cdot (0,0,0,1) \\ f(T^2) &= (0,0,1,1) = 0 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (0,1,0,0) + 1 \cdot (0,0,1,0) + 1 \cdot (0,0,0,1). \end{aligned}$$

   Also gilt

   $$_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6

Wir verwenden das Monotonieprinzip. Wir wissen schon, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Damit ist (a_n) durch 0 nach unten beschränkt. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{(1+a_n)a_n} = \frac{1}{1+a_n} < 1.$$

Es folgt, dass (a_n) monoton fallend ist. Damit ist (a_n) durch a_1 nach oben beschränkt. Mit dem Monotonieprinzip gilt, dass (a_n) konvergent ist.

Aufgabe 7

1. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+(-1)^n}{n^2}$ ist zwar alternierend, aber die Folge $(b_n) = (\frac{n+(-1)^n}{n^2})$ ist nicht monoton fallend, wie wir jetzt zeigen werden.

   Dazu reicht es, die ersten Folgeglieder von (b_n) auszurechnen: Es sind $b_1 = \frac{1+(-1)}{1} = 0$, $b_2 = \frac{2+(-1)^2}{4} = \frac{3}{4}$, $b_3 = \frac{3+(-1)^3}{9} = \frac{2}{9}$ und $b_4 = \frac{4+(-1)^4}{16} = \frac{5}{16}$. Es sind $b_1 < b_2$ (schon dies zeigt, dass (b_n) nicht monoton fallend ist), $b_2 > b_3$ und $b_3 < b_4$. Die Folge (b_n) ist daher nicht monoton fallend.

   Man kann sogar zeigen (musste man hier aber nicht), dass es unendlich viele Stellen der Folge gibt, an denen sie nicht monoton fällt. Dazu sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \tfrac{n+1+(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} - \tfrac{n+(-1)^n}{n^2} \\ &= \tfrac{n+2}{(n+1)^2} - \tfrac{n-1}{n^2} \\ &= \tfrac{n^2(n+2)-(n+1)^2(n-1)}{n^2(n+1)^2} \\ &= \tfrac{n^3-2n^2-n^3-2n^2-n+n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2} \\ &= \tfrac{n^2+n+1}{n^2(n+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

   Ist n also ungerade, dann ist $b_{n+1} > b_n$. Somit ist die Folge (b_n) nicht monoton fallend.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(-1)^n\frac{n+(-1)^n}{n^2} = (-1)^n\frac{1}{n} + \frac{(-1)^{2n}}{n^2} = (-1)^n\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

   Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ ist als Negative der alternierenden geometrischen Reihe konvergent, und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ist ebenfalls konvergent. Daher konvergiert die Summe dieser Reihen, also die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+(-1)^n}{n^2}$.

Aufgabe 8

Es ist $\exp(x)(y-x) < \exp(y) - \exp(x) < \exp(y)(y-x)$ genau dann, wenn $\exp(x) < \frac{\exp(y)-\exp(x)}{y-x} < \exp(y)$ gilt.

Da die Exponentialfunktion überall stetig und überall differenzierbar ist, können wir den Mittelwertsatz auf die Exponentialfunktion im Intervall $[x, y]$ anwenden. Dies zeigt, dass es ein $x_0 \in (x, y)$ so gibt, dass $\frac{\exp(y)-\exp(x)}{y-x} = \exp'(x_0) = \exp(x_0)$ ist. Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, folgt $\exp(x) < \exp(x_0) < \exp(y)$, also $\exp(x) < \frac{\exp(y)-\exp(x)}{y-x} < \exp(y)$.

Aufgabe 9

Wir untersuchen die Funktionen zunächst auf Stetigkeit in 0.

Sei (x_n) eine beliebige Nullfolge. Dann ist (x_n^k) für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge. Sei $b_n = \sin(\frac{1}{x_n})$, falls $x_n \neq 0$ ist, und $b_n = 0$, falls $x_n = 0$ ist. Dann ist (b_n) beschränkt, und damit ist $(x_n^k b_n)$ eine Nullfolge. Es ist aber $x_n^k b_n = f(x_n)$, und es folgt, dass der Grenzwert von $(f(x_n))$ existiert, gleich 0 und damit gleich $f(0)$ ist. Somit ist f für alle $k \in \mathbb{N}$ stetig in $x = 0$.

Wir untersuchen die Funktionen jetzt auf Differenzierbarkeit in 0.

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R} \setminus 0$, die gegen 0 konvergiert. Es ist

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{x_n^k \sin(\frac{1}{x_n})}{x_n} = x_n^{k-1} \sin(\frac{1}{x_n}).$$

Wie im ersten Teil der Aufgabe ist $(x_n^{k-1} \sin(\frac{1}{x_n}))$ für $k > 1$ konvergent, und es folgt die Differenzierbarkeit der Funktionen in 0 für $k > 1$. Ist $k = 1$, so ist die Funktion in 0 nicht differenzierbar. Sei etwa $x_n = \frac{2}{n\pi}$. Dann ist (x_n) eine Nullfolge, aber die Folge $(\sin(\frac{1}{x_n}))$ ist nicht konvergent, da sie unendlich oft die Werte -1, 0 und 1 annimmt. Somit existiert der Grenzwert der Folge $(\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0})$ für $k = 1$ nicht.

Aufgabe 10

1. Seien $\alpha = (A \vee B) \to A$ und $\beta = B \to (A \wedge B)$. Eine Wahrheitstafel für α und β kann dann so aussehen:

A	B	$A \vee B$	α	$A \wedge B$	β
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

   Die vierte und sechste Spalte der Wahrheitstafel zeigen, dass α und β äquivalent sind.

2. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcll} \alpha & = & (A \vee B) \to A & \\ & \approx & \neg(A \vee B) \vee A & \text{Junktor-Minimierung} \\ & \approx & (\neg A \wedge \neg B) \vee A & \text{De Morgan} \\ & \approx & (\neg A \vee A) \wedge (\neg B \vee A) & \text{Distributivgesetze} \\ & \approx & (\neg B \vee A) & \neg A \vee A \approx 1 \text{ und } \alpha \wedge 1 \approx \alpha \end{array}$$

   und

$$\begin{array}{rcll} \beta & = & B \to (A \wedge B) & \\ & \approx & \neg B \vee (A \wedge B) & \text{Junktor-Minimierung} \\ & \approx & (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee B) & \text{Distributivgesetze} \\ & \approx & (\neg B \vee A) & \neg B \vee B \approx 1 \text{ und } \alpha \wedge 1 \approx \alpha \end{array}$$

   Dies zeigt, dass α und β äquivalent sind.

Mathematische Grundlagen: Klausur vom 21.09.2013

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2013

Klausur am 21.09.2013:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Wir betrachten die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 4 & 2 & 2 & | & 0 \\ 3 & 1 & 0 & | & 1 \\ -2 & 0 & 2 & | & t \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten und addieren dann die vierte Zeile zur ersten und dritten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & | & t \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & t+1 \\ -2 & 0 & 2 & | & t \end{pmatrix}.$$

Nun machen wir die dritte Zeile zur ersten, die erste zur zweiten, die vierte zur dritten und die zweite zur vierten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & t+1 \\ 0 & 1 & 3 & | & t \\ -2 & 0 & 2 & | & t \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt addieren wir das Doppelte der ersten Zeile zur dritte Zeile und subtrahieren dann die zweite Zeile von der ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & | & t \\ 0 & 2 & 6 & | & 3t+2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & | & t \\ 0 & 0 & 0 & | & t+2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix hat den Rang 2, die erweiterte den Rang 2, wenn $t+2 = 0$ gilt, und den Rang 3, wenn $t + 2 \neq 0$ gilt. Das Gleichungssystem hat also genau dann mindestens eine Lösung, wenn $t + 2 = 0$, also $t = -2$ gilt.

Aufgabe 2

(a) Seien $A, B \in M_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(A+B) &= (A+B)X - X(A+B) = AX + BX - XA - XB \\ &= AX - XA + BX - XB = \varphi(A) + \varphi(B). \end{aligned}$$

Sei nun $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\varphi(\lambda A) = (\lambda A)X - X(\lambda A) = \lambda AX - \lambda XA = \lambda(AX - XA) = \lambda\varphi(A).$$

Also ist φ linear.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\varphi\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\\
&= 0 \cdot E_{11} + 1 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22}.\\
\varphi\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\\
&= 0 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22}.\\
\varphi\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\\
&= (-1) \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 1 \cdot E_{22}.\\
\varphi\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}\\
&= 0 \cdot E_{11} + (-1)E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Mit dem Rangsatz (angewendet auf φ) gilt

$$\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(U).$$

Da φ nach Voraussetzung injektiv ist, gilt $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = 0$, also $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(U)$. Weiter ist nach Voraussetzung $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\psi)$, also folgt $\dim(\mathrm{Kern}(\psi)) = \dim(U)$. Mit dem Rangsatz (angewendet auf ψ) folgt nun

$$\dim(\mathrm{Kern}(\psi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\psi)) = \dim(U) + \dim(\mathrm{Bild}(\psi)) = \dim(V).$$

Da ψ nach Voraussetzung surjektiv ist, ist $\dim(\mathrm{Bild}(\psi)) = \dim(W)$ und somit

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(V).$$

Aufgabe 4

Für den Induktionsanfang sei $n = 1$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Quotientenregel

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x} = (-1)\frac{x-1}{e^x},$$

also gilt der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{x-n}{e^x}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dann folgt (wieder mit Quotientenregel)

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = \left((-1)^n \frac{x-n}{e^x}\right)' = (-1)^n \frac{e^x - (x-n)e^x}{(e^x)^2} = (-1)^n \frac{1-(x-n)}{e^x} \\ &= (-1)^n \frac{-x+(n+1)}{e^x} = (-1)^{n+1} \frac{x-(n+1)}{e^x} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dabei wurde beim zweiten Gleichheitszeichen die Induktionsannahme benutzt. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 5

(a) Es gilt

$$\frac{n^3(n+1)^2}{3n^5 - 2\pi} = \frac{n^3(n^2+2n+1)}{3n^5-2\pi} = \frac{n^5+2n^4+n^3}{3n^5-2\pi} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2\pi}{n^5}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n^5} = 0$ gilt, folgt

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}) = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 1+0+0 = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty}(3-\frac{2\pi}{n^5}) = 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n^5} = 3-0 = 3,$$

also insgesamt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n+1)^2}{3n^5-2\pi} = \frac{1}{3}.$$

(b) Wir verwenden die Substitutionsregel mit $f(u) = \frac{1}{u}$ und $g(x) = x^4+1$. Dann ist $g'(x) = 4x^3$, also

$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{4x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\int_2^{17}\frac{1}{u}du = \frac{1}{4}\ln(u)\Big|_2^{17} = \frac{1}{4}\ln(17) - \frac{1}{4}\ln(2) = \frac{1}{4}\ln(\frac{17}{2}).$$

Aufgabe 6

Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{x-1} + x^2 - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig und differenzierbar auf $[0,1]$. Es gilt $f(0) = e^{-1} - 1 < 0$ und $f(1) = 1-1+1 = 1 > 0$. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano hat f also mindestens eine Nullstelle im Intervall $(0,1)$. Weiter gilt

$$f'(x) = e^{x-1} + 2x \text{ für } x \in [0,1]$$

und damit $f'(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$. Die Funktion f ist damit auf dem ganzen Intervall streng monoton steigend und kann daher nur höchstens eine Nullstelle haben. Insgesamt ist damit gezeigt, dass f genau eine Nullstelle auf $[0,1]$ besitzt. Diese Nullstelle ist genau das $x \in [0,1]$, für das $1 - x^2 = e^{x-1}$ gilt.

Aufgabe 7

Die vorgegebene Reihe ist eine Potenzreihe mit $a_n = \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können den Konvergenzradius mit dem Konvergenzkriterium von Cauchy-Hadamard berechnen. Dazu betrachten wir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}}.$$

Da die Wurzelfunktion stetig ist, dürfen wir den Grenzwert unter die Wurzel ziehen. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \sqrt{1} = 1.$$

Damit ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\frac{1}{1} = 1$, und die Potenzreihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Man hätte mit etwas mehr Aufwand auch die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}x^n$ einmal für $|x| < 1$ und einmal für $|x| > 1$ mit dem Quotienten- oder Wurzelkriterium abschätzen können.

Für $x = 1$ müssen wir die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}$ betrachten. Da $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist (sie ist monoton wachsend und unbeschränkt), kann diese Reihe nicht konvergieren. Da auch $((-1)^n\sqrt{n})$ keine Nullfolge ist, divergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}(-1)^n$.

Aufgabe 8

(a) Die Formel $\alpha = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ ist erfüllbar, aber weder tautologisch noch widerspruchsvoll. Mit der Bewertung $\mathcal{I}(A) = \mathbf{1}$ und $\mathcal{I}(B) = \mathbf{0}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = \mathbf{1}$, und mit der Bewertung $\mathcal{I}(A) = \mathbf{1}$ und $\mathcal{I}(B) = \mathbf{1}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = \mathbf{0}$.

(b) Die Formel $\gamma = ((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow (A \to (B \to C))$ ist eine Tautologie. Für den zweiten Teil der Formel gilt nämlich

$$\begin{aligned} A \to (B \to C) &\approx \neg A \vee (B \to C) && \text{(Junktorminimierung)} \\ &\approx \neg A \vee (\neg B \vee C) && \text{(Junktorminimierung)} \\ &\approx (\neg A \vee \neg B) \vee C && \text{(Assoziativgesetze)} \\ &\approx \neg(A \wedge B) \vee C && \text{(deMorgan)} \\ &\approx (A \wedge B) \to C && \text{(Junktorminimierung rückwärts)} \end{aligned}$$

Damit stehen in γ links und rechts von der Äquivalenz äquivalente Formeln, γ ist also immer erfüllt und damit eine Tautologie (was man natürlich auch mit einer Wahrheitstafel zeigen kann).

Klausur am 29.03.2014:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $A^{n_0} = A$, und $\begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A = A^1$. Es gilt also der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt. Es gilt aber tatsächlich

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \cdot 2 + 0 & 2^n + (2^n - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2 \cdot 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Wir subtrahieren von der zweiten Zeile das zweifache und von der dritten das dreifache der ersten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right),$$

dann von der dritten die zweite

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

und müssen nur noch das doppelte der dritten zur ersten addieren und das vierfache der dritten von der zweiten subtrahieren, um die Treppennormalform zu erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und -1 ein

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir können auch die TNF „von unten" auflösen und erhalten

$$x_4 = 1 \ , \quad x_3 \text{ beliebig} \ , \quad x_2 = -6 - 2x_3 \ , \quad x_1 = 3 - x_3$$

(mit dem gleichen Ergebnis).

Aufgabe 3

Es ist

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(A) = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a-b & a+2b \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a+b = a-b = a+2b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \ , \end{aligned}$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \right\} = \{ c \cdot E_{21} + d \cdot E_{22} \mid c, d \in \mathbb{R} \}$. Die Einheitsmatrizen E_{21} und E_{22} bilden also ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Kern}(f)$, und da sie linear unabhängig sind, bilden sie auch eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$. Diese Basis kann durch E_{11} und E_{12} zur (kanonischen) Basis von $M_{22}(\mathbb{R})$ ergänzt werden, und $f(E_{11})$ und $f(E_{12})$, also $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ bilden dann eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Aufgabe 4

f ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{x} e^{-x} - \ln(x) e^{-x} = \left(\frac{1}{x} - \ln(x)\right) e^{-x}$. Der Faktor e^{-x} ist immer positiv, das Vorzeichen von f' wird also von $h(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$ bestimmt. Das ist eine stetige Funktion mit (z.B.) $h(1) = 1 - 0 = 1 > 0$, $h(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ (wegen $e > 1$). Nach dem Nullstellensatz von Bolzano hat h und damit auch f' also mindestens eine Nullstelle x_0 in $(0, \infty)$. (Genauer gilt x_0 in $(1, e)$, aber das interessiert uns jetzt nicht.) Es hat dort aber auch höchstens eine Nullstelle, denn in $(0, \infty)$ sind $\frac{1}{x}$ und $-\ln(x)$ streng monoton fallend (denn $\ln(x)$ ist streng monoton wachsend), insgesamt ist also h streng monoton fallend. (Das folgt auch aus $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ für $x > 0$.) Damit ist $h(x) > 0$ für $x < x_0$ und $h(x) < 0$ für $x > x_0$, und dasselbe gilt dann auch für f'. Also hat f in x_0 ein Maximum, und es kann keine weiteren Extrema geben.

Aufgabe 5

$x \sin(x)$ und $\ln(1+x^2)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar und nehmen in $x = 0$ jeweils den Wert 0 an. Nach de l'Hospital gilt dann

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{\ln(1+x^2)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + x\cos(x)}{2x \cdot \frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2}{2} \cdot \frac{\sin(x)}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2}{2} \cos(x) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} + \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} + \frac{1}{2} \ ,\end{aligned}$$

<u>wenn</u> $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (und damit die ganze rechte Seite) existiert. Dafür kann aber wieder de l'Hospital angewendet werden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1 \ ,$$

also tatsächlich

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{\ln(1+x^2)} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} = 1 \ .$$

Aufgabe 6

Die Potenzreihe hat die Koeffizienten $a_n = \frac{e^{n+2}}{n}$, also gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{e^n} \cdot \sqrt[n]{e^2}}{\sqrt[n]{n}} = e \cdot \frac{\sqrt[n]{e^2}}{\sqrt[n]{n}}$, also ($\lim \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim \sqrt[n]{c} = 1$ für jedes $c > 0$ kennen wir) $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = e$; also gilt nach dem Konvergenzkriterium von Cauchy-Hadamard $R = \frac{1}{e}$. Die Potenzreihe konvergiert also für $x \in (-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ und divergiert für $|x| > \frac{1}{e}$.

Die Ränder des Konvergenzintervalls sind gesondert zu untersuchen: Für $x = \frac{1}{e}$ erhalten wir die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n+2}}{ne^n} = e^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, also (bis auf einen Faktor) die divergente harmonische Reihe, für $x = -\frac{1}{e}$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n+2}}{n}(-1)^n \frac{1}{e^n} = e^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, also (bis auf einen Faktor) die nach dem Leibnizkriterium konvergente alternierende harmonische Reihe. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe also genau für $x \in [-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

Wegen $2 < e$ gilt $\frac{1}{2} > \frac{1}{e}$, also $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{e}$, also divergiert die Reihe für $x = -\frac{1}{2}$; wegen $3 > e$ gilt $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{e}$, also konvergiert die Reihe für $x = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 7

Wir setzen $f(x) = \ln(x)$, $g'(x) = x^2$, also $f'(x) = \frac{1}{x}$ und (z.B.) $g(x) = \frac{x^3}{3}$. Dann erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x) \cdot x^2 \, dx &= \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \frac{x^3}{3} \, dx = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\ln(1) - \int_1^2 \frac{x^2}{3} \, dx \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{x^3}{9}\Big|_1^2 = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9} \ .\end{aligned}$$

Aufgabe 8

Aus der Wahrheitstafel folgt unmittelbar (durch „Aufzählung der Einsen“) die DNF

$$\alpha \approx (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

Diese können wir weiter umformen zu

$$\begin{array}{rcll}
\alpha & \approx & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee ((\neg A \wedge (B \wedge C)) \vee (A \wedge (B \wedge C))) & \text{Klammern setzen} \\
 & \approx & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee ((\neg A \vee A) \wedge (B \wedge C)) & \text{Distributivgesetz} \\
 & \approx & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee ((B \wedge C)) & \neg A \vee A \approx 1 \text{ und } 1 \wedge \beta \approx \beta \\
 & \approx & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (B \wedge C) & \text{Klammern weglassen .}
\end{array}$$

Dies ist ebenfalls eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α, mit nur noch zwei Monomen.

Aus dieser letzten Form erhalten wir

$$\begin{array}{rcll}
\alpha & \approx & ((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee B) \wedge ((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee C) & \text{Distributivgesetz} \\
 & \approx & ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee B) \wedge (\neg C \vee B)) & \\
 & & \wedge((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee C)) & \text{Distributivgesetz} \\
 & \approx & ((\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B)) \wedge ((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)) & \neg A \vee A \approx 1 \text{ und } 1 \wedge \beta \approx \beta \\
 & \approx & (\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) & \text{Klammern weglassen .}
\end{array}$$

Das ist eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform von α.

Klausur 20 September Summer 2014, Antworten

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2014

Klausur am 20.09.2014:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Wir müssen die zweite Ableitung von f an der Stelle x berechnen.

Es ist $f'(x) = a(\cos(ax)) = a\cos(ax)$ mit der Kettenregel und weil $\sin' = \cos$ ist. Da $\cos' = -\sin$ ist, folgt wieder mit der Kettenregel $f''(x) = -a(a\sin(ax))$, also $f^{(2)}(x) = (-1)^1 a^2 \sin(ax)$. Somit gilt der Induktionsanfang.

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass $f^{(2n)}(x) = (-1)^n a^{2n} \sin(ax)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist. Es ist zu zeigen, dass $f^{(2(n+1))}(x) = f^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} a^{2n+2} \sin(ax)$ ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} f^{(2n+1)}(x) &= ((-1)^n a^{2n} \sin(ax))' \text{ mit Induktionsvoraussetzung} \\ &= (-1)^n a^{2n}(a\cos(ax)) \text{ mit Kettenregel und weil } \sin' = \cos \text{ ist} \\ &= (-1)^n a^{2n+1} \cos(ax) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f^{(2n+2)}(x) &= ((-1)^n a^{2n+1})(-a\sin(ax))) \text{ mit Kettenregel und weil } \cos' = -\sin \text{ ist} \\ &= (-1)^{n+1} a^{2(n+1)} \sin(ax). \end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Wir suchen alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, also die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die erweiterte Koeffizientenmatrix A' ist

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & | & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix überführen wir in Treppennormalform. Dazu subtrahieren wir das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten und das Dreifache der ersten Zeile von der dritten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & | & -14 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten und addieren das Doppelte der zweiten Zeile zur ersten. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & | & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist in Treppennormalform. Es ist $\mathrm{Rg} = \mathrm{Rg}(A')$, also existieren Lösungen. Wir verfahren jetzt wie im Kurstext beschrieben. Wir streichen alle Nullzeilen und fügen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links vom Strich quadratisch ist und die 1'en auf der Diagonalen stehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & | & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Rechts des Striches steht eine spezielle Lösung $\lambda_0 = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$. Links des Striches fügen wir -1 dort auf der Diagonalen ein, wo 0 steht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & | & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die gesuchte Lösungsmenge $\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Aufgabe 3

Für $t \neq 0$ liegt der Nullvektor nicht in U_t. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_t kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Ist $t = 0$, so ist U_t die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$. In diesem Fall ist U_t ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4

Sei $f \neq \mathrm{id}_V$. Dann gibt es ein $x \in V$ mit $f(x) \neq x$, also $f(x) - x \neq 0$. Wir wenden nun f auf das Element $f(x) - x$ an und erhalten $f(f(x) - x) = f(f(x)) - f(x)$, denn f ist linear. Ferner ist $f(f(x)) = (f \circ f)(x)$, und wegen $f \circ f = f$ folgt $f(f(x)) = f(x)$. Somit gilt $f(f(x) - x) = f(f(x)) - f(x) = 0$. Es folgt, dass $f(x) - x \in \mathrm{Kern}(f)$ gilt, und da $f(x) - x \neq 0$ ist, ist $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$. Es folgt, dass f nicht injektiv ist.

Aufgabe 5

1. Es ist (v_{12}, v_{13}, v_{23}) ein Erzeugendensystem von $\langle v_{12}, v_{13}, v_{23}\rangle$. Weiter ist
$$v_{23} = v_{13} - v_{12} = v_1 - v_3 - v_1 + v_2.$$
Somit ist v_{23} linear abhängig von v_{12} und v_{13} und es folgt $\langle v_{12}, v_{13}, v_{23}\rangle = \langle v_{12}, v_{13}\rangle$. Wir zeigen jetzt, dass v_{12} und v_{13} linear unabhängig sind. Dazu seien $a, b \in \mathbb{K}$ mit
$$av_{12}+bv_{13} = a(v_1-v_2)+b(v_1-v_3) = av_1-av_2+bv_1-bv_3 = (a+b)v_1-av_2-bv_3 = 0.$$
Da v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind, folgt $a = b = a + b = 0$. Dies zeigt, dass v_{12} und v_{13} linear unabhängig sind. Somit ist (v_{12}, v_{13}) eine Basis von $\langle v_{12}, v_{13}, v_{23}\rangle$.
2. Als Linearkombinationen von v_1, v_2 und v_3 sind v_{12} und v_{12} Elemente in V. Wir zeigen, dass (v_1, v_{12}, v_{13}) eine Basis von V ist. Dazu seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit
$$av_1 + bv_{12} + cv_{13} = av_1 + bv_1 - bv_2 + cv_1 - cv_3 = (a + b + c)v_1 - bv_2 - cv_3 = 0.$$
Da (v_1, v_2, v_3) ein System linear unabhängiger Vektoren ist, folgt $b = c = a+b+c = 0$, also auch $a = 0$. Somit ist (v_1, v_{12}, v_{13}) ein System linear unabhängiger Vektoren in V. Nun ist aber $\dim(V) = 3$, und da drei linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum der Dimension 3 bereits eine Basis von V bilden, folgt, dass (v_1, v_{12}, v_{13}) eine Basis von V ist.

Aufgabe 6

Zum Beweis der Konvergenz zerlegen wir die Reihe in zwei Teile. Es ist $(-1)^k \frac{k+(-1)^k}{k^2} = (-1)^k \frac{k}{k^2} + (-1)^k \frac{(-1)^k}{k^2} = (-1)^k \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$, also $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k+(-1)^k}{k^2} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Die Reihen $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ und $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergieren, also auch ihre Summe.

Um das Leibnitzkriterium anwenden zu dürfen, muss die Folge der $a_k = (-1)^k \frac{k+(-1)^k}{k^2}$ monoton fallend sein. Wir zeigen, das dies hier nicht der Fall ist. Es gilt
$$\begin{aligned} a_k - a_{k+1} &= \tfrac{k+(-1)^k}{k^2} - \tfrac{(k+1)+(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} \\ &= \tfrac{k(k+1)^2+(-1)^k(k+1)^2-k^2(k+1)-(-1)^{k+1}k^2}{k^2(k+1)^2} \\ &= \tfrac{(k^2+k)+(-1)^k(2k^2+2k+1)}{k^2(k+1)^2}. \end{aligned}$$
Der Ausdruck unter dem Bruchstrich ist immer > 0, der auf dem Bruchstrich ist für gerade k größer als 0 und für ungerade kleiner als 0. Somit ist die Folge (a_k) nicht monoton fallend, und die Vorraussetzung für das Leibnitzkriterium ist nicht erfüllt.

Aufgabe 7

Nach Voraussetzung gilt $0 < g'(x) - f'(x) = (g - f)'(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Damit ist $g - f$ auf $[a, b]$ streng monoton wachsend. Es folgt $g(x) - f(x) > g(a) - f(a) = 0$ für alle $x \in (a, b]$, also $g(x) > f(x)$ für alle $x \in (a, b]$.

Aufgabe 8

1. (a)
$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(L(x,y) \wedge \neg(\exists z(M(z) \wedge V(z,y)))))$$

   (b)
$$(\forall x(P(x) \rightarrow \exists y L(x,y))) \rightarrow (\neg(\exists z(M(z) \wedge \forall v(P(v) \rightarrow V(z,v)))))$$

2. Es gibt eine Lösung, die eine Lösung für alle Probleme ist.

Mathematische Grundlagen (01141) WS 2014/15

Klausur am 28.03.2015:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $a_1 = 10 \geq 4$. Es gilt also der Induktionsanfang. Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $a_n \geq 4$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $a_{n+1} \geq 4$ folgt. Es gilt aber (wegen der Monotonie der Wurzelfunktion) tatsächlich

$$a_{n+1} = 2 + \sqrt{2a_n - 1} \geq 2 + \sqrt{2 \cdot 4 - 1} = 2 + \sqrt{7} \geq 2 + \sqrt{4} = 4 \ .$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & | & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 6 & | & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Wir subtrahieren von der zweiten Zeile das dreifache und von der dritten das vierfache der ersten

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \ ,$$

dann vertauschen wir die zweite mit der dritten Zeile und ziehen anschließend von der neuen zweiten die dritte ab

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & | & -2 \end{pmatrix}$$

und müssen nur noch das doppelte der zweiten zur ersten addieren und das vierfache der zweiten von der dritten subtrahieren, um die Treppennormalform zu erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & -6 \end{pmatrix} \ .$$

Zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

Wir können auch die TNF „von unten“ auflösen und erhalten

$$x_4 \text{ beliebig}\ ,\quad x_3 = -6 - 2x_4\quad ,\quad x_2 = 1\ ,\quad x_1 = 3 - x_4$$

(mit dem gleichen Ergebnis).

Aufgabe 3

Einfacher als das sich aufdrängende $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ist z.B. die Wahl $x_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; aus $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ folgt dann

$$\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b\\b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a+b\\b+c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ ,$$

also $a = 0$ und dann der Reihe nach auch $b = 0$ und $c = 0$. x_1, x_2 und x_3 sind somit linear unabhängig und bilden (als drei linear unabhängige Vektoren im dreidimensionalen $\mathbb{R}^3$) eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4

a) In $V = \mathbb{R}^2$ können wir z.B. $f : V \to V\,, f\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ definieren; dass die Matrizenmultiplikation eine lineare Abbildung ist, haben wir im Kurs gezeigt, und es ist

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \Leftrightarrow f\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow\ a = 0\,,\ b \text{ beliebig}$$

und

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(f)\ \Leftrightarrow\ \text{es gibt } x, y \text{ mit } f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ a = 0\,,\ b \text{ beliebig};$$

also ist tatsächlich Kern(f)=Bild(f).

b) Für $V = \mathbb{R}^3$ kann es kein entsprechendes f geben: Wenn $\mathrm{Kern}(f)\!=\!\mathrm{Bild}(f)$ sein soll, muss auch $\dim(\mathrm{Kern}(f))\!=\!\dim(\mathrm{Bild}(f))$ gelten; wenn wir das in den Rangsatz einsetzen, erhalten wir $\dim(V)\!=\!\dim(\mathrm{Kern}(f))\!+\!\dim(\mathrm{Bild}(f))\!=\!2\dim(\mathrm{Kern}(f))$. Für $\dim(V)\!=\!3$ ist das nicht zu erfüllen.

Aufgabe 5

a) In Aufgabe 1 ist bereits gezeigt worden, dass die Folge (a_n) nach unten zumindest durch 4 beschränkt ist; wenn wir noch zeigen können, dass sie monoton fallend ist, ist sie automatisch auch nach oben beschränkt und nach dem Monotonieprinzip konvergent (mit Grenzwert ≥ 4). Bei einer rekursiv definierten Folge geht das nur mit (erneuter) vollständiger Induktion.

Wir wollen also zeigen, dass $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $a_1 = 10$, $a_2 = 2 + \sqrt{2 \cdot 10 - 1} = 2 + \sqrt{19} \leq 2 + \sqrt{25} = 7$, also $a_2 \leq a_1$.

Es gilt also der Induktionsanfang. Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $a_{n+1} \leq a_n$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $a_{n+2} \leq a_{n+1}$ folgt. Es gilt aber (wegen der Monotonie der Wurzelfunktion) tatsächlich

$$a_{n+2} = 2 + \sqrt{2a_{n+1} - 1} \leq 2 + \sqrt{2a_n - 1} = a_{n+1} \ .$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Also ist die Folge (a_n) monoton fallend und nach unten durch 4 beschränkt, konvergiert daher nach dem Monotonieprinzip gegen a mit $a \geq 4$. Aus der Rekursion für a_n und der Stetigkeit der Wurzelfunktion folgt aber

$$\begin{aligned} & a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (2 + \sqrt{2a_n - 1}) = 2 + \sqrt{2 \cdot (\lim_{n\to\infty} a_n) - 1} = 2 + \sqrt{2a - 1} \\ \Rightarrow \quad & (a-2)^2 = 2a - 1 \ \Leftrightarrow \ a^2 - 6a + 5 = (a-5)(a-1) = 0 \ , \end{aligned}$$

also (wegen $a \geq 4$) $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

b) Zu untersuchen ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $b_n = \left(\frac{3}{a_n}\right)^n$; dafür gilt ($a_n \geq 4$ dürfen wir verwenden)

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{3}{a_n} \leq \frac{3}{4} =: q < 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \ .$$

Also konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

Aufgabe 6

f mit $f(x) = x^{-1}\ln(x)$ ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = -x^{-2}\ln(x) + x^{-1}\cdot x^{-1} = x^{-2}(1 - \ln(x))$. Der Faktor x^{-2} ist immer positiv, das Vorzeichen von f' wird also von $h(x) = 1 - \ln(x)$ bestimmt. Das ist eine stetige Funktion mit $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln(x_0) = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$, und weil ln monoton steigend ist, ist h monoton fallend; also gilt $h(x) > 0$ für $x < x_0$ und $h(x) < 0$ für $x > x_0$, und dasselbe gilt dann auch für f'. f hat somit in $x_0 = e$ ein lokales Maximum, und da f' keine weiteren Nullstellen hat, kann es keine weiteren Extrema geben.

Aufgabe 7

Wir setzen $f(x) = \ln(x)$, $g'(x) = x^{-2}$, also $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ und (z.B.) $g(x) = -x^{-1}$. Dann erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^{-2}\ln(x)\,dx &= -x^{-1}\ln(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 (-x^{-1})x^{-1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(2) - (-1)\ln(1) + \int_1^2 x^{-2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln(2) + (-x^{-1})\Big|_1^2 = -\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(1 - \ln(2)) \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Wir erhalten

$$
\begin{array}{rcll}
\alpha & = & ((B \vee \neg C) \wedge \neg D) \rightarrow \neg A & \\
& \approx & \neg A \vee \neg((B \vee \neg C) \wedge \neg D) & \text{Junktorminimierung} \\
& \approx & \neg A \vee (\neg(B \vee \neg C) \vee D) & \text{de Morgan, Negationsregel} \\
& \approx & \neg A \vee ((\neg B \wedge C) \vee D) & \text{de Morgan} \\
& \approx & \neg A \vee (\neg B \wedge C) \vee D & \text{Klammern weglassen .}
\end{array}
$$

Dies ist eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α.

Aus dieser letzten Form erhalten wir

$$
\begin{array}{rcll}
\alpha & \approx & (\neg A \vee (\neg B \wedge C)) \vee D & \text{Klammern} \\
\alpha & \approx & ((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C)) \vee D & \text{Distributivgesetz} \\
\alpha & \approx & ((\neg A \vee \neg B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee C) \vee D) & \text{Distributivgesetz} \\
\alpha & \approx & (\neg A \vee \neg B \vee D) \wedge (\neg A \vee C \vee D) & \text{Klammern weglassen .}
\end{array}
$$

Das ist eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform von α.

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2015

Klausur am 26.09.2015:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a \leq 1$.

Für $n = 1$ gilt $(1+a)^1 = 1+a) \leq 1+(2^1-1)a = 1+a$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass $(1 + a)^n \leq 1 + (2^n - 1)a$ für ein $n \geq 1$ gilt. Im Induktionsschritt müssen wir zeigen, dass daraus $(1 + a)^{n+1} \leq 1 + (2^{n+1} - 1)a$ folgt.

$$\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n \\
&\leq (1+a)(1+(2^n-1)a) \text{ mit der Induktionsvoraussetzung} \\
&= 1+(2^n-1)a+a+(2^n-1)a^2 \text{ ausmultiplizieren} \\
&= 1+(2^n-1+1+(2^n-1)a)a \text{ ausklammern} \\
&= 1+(2^n+(2^n-1)a)a \\
&\leq 1+(2^n+(2^n-1))a, \text{ denn } 0 \leq a \leq 1 \\
&= 1+(2^{n+1}-1)a.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.

Aufgabe 2

Der Kern von f besteht aus allen Vektoren $x \in \mathbb{R}^5$ mit $Ax = 0$, ist also die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Dies bestimmen mit Hilfe des Gaußalgorithmus. Dazu überführen wir A in Treppennormalform.

Es ist $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir subtrahieren die erste Zeile von der zweiten, addieren die erste Zeile zur dritten und subtrahieren das 3-Fache der ersten Zeile von der vierten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die letzten vier Zeilen sind Vielfache voneinander, wir können also die letzten drei Zeilen

durch Nullzeilen ersetzen. Wir teilen die zweite Zeile noch durch 2 und erhalten

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt addieren wir die zweite Zeile zur ersten und teilen dann die erste Zeile durch -2 und die zweite durch 2. Das Ergebnis ist die Treppennormalform T zu A, also

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir streichen die Nullzeilen und fügen neue Nullzeilen so ein, dass die Pivot-Einsen in T auf der Diagonalen stehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir fügen -1 dort auf der Diagonalen ein, wo 0 steht:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten, in denen wir -1 eingefügt haben, bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Kern}(f)$. Die Spalten sind auch linear unabhängig, bilden daher eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$. Es ist also $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

Zur Berechnung einer Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ verwenden wir zunächst den Rangsatz. Es ist $\dim(\mathbb{R}^5) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$, also $5 = 3 + \dim(\mathrm{Bild}(f))$. Es folgt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2$. Es reicht also, zwei linear unabhängige Vektoren in $\mathrm{Bild}(f)$ zu finden. Wenn wir die A mit den Vektoren der Standardbasis $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ von $\mathbb{R}^5$ multiplizieren, erhalten wir mit Ae_i gerade die i-te Spalte von A, also $Ae_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Ae_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Ae_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$Ae_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $Ae_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Vektoren Ae_1 und Ae_3 sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander, und sie liegen in $\text{Bild}(f)$. Sie bilden daher eine Basis von $\text{Bild}(f)$.

Aufgabe 3

Seien U, V, W und u, w wie in der Aufgabenstellung, und sei $U \cap W = \{0\}$. Seien $a, b \in \mathbb{K}$ mit $au + bw = 0$. Ist $a \neq 0$, so folgt $u = \frac{b}{a} w$, und damit $u \in W$. Dann gilt $u \in U \cap W$, und $u \neq 0$. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $U \cap W = \{0\}$ ist, und es folgt daher $a = 0$. Da $0u = 0$ ist, folgt $bw = 0$. Da $w \neq 0$ ist, kann diese Gleichung nur für $b = 0$ erfüllt sein. Wir haben also gezeigt, dass $a = b = 0$ ist, und dies bedeutet, dass u und w linear unabhängig sind.

Aufgabe 4

Es ist $f'(x) = 1 - 2\sin(x)$. Aus der Bedingung $f'(x) = 0$, also $\sin(x) = \frac{1}{2}$, folgt, dass mögliche Minima und Maxima für $x_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ beziehungsweise $y_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vorliegen. Die Funktion f' ist differenzierbar, und es gilt $f''(x) = -2\cos x$. Es ist $f''(x_k) = -2\cos(\frac{\pi}{6}) < 0$ und $f''(y_k) = -2\cos(\frac{5\pi}{6}) > 0$. Damit liegt bei x_k, $k \in \mathbb{Z}$, ein lokales Maximum vor, und bei y_k, $k \in \mathbb{Z}$, ein lokales Minimum.

Aufgabe 5

Als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall nimmt f irgendwo (möglicherweise mehrfach) in $[a, b]$ ihr Maximum an.

1. Bedingung (ii) ist äquivalent mit: Für jedes $y \in (a, b]$ gilt $f(y) \leq f(a)$. Für $y = a$ gilt ebenfalls $f(a) \leq f(a)$, also gilt für alle $y \in [a, b]$, dass $f(y) \leq f(a)$, d.h. a ist eine Maximalstelle von f.

2. Sei $c \in (a, b)$; nach Bedingung (i) gibt es dann ein $y \in (c, b]$ mit $f(y) > f(c)$, also ist c keine Maximalstelle von f.

3. Wir wissen bereits, dass a eine Maximalstelle von f ist, und müssen nun noch zeigen, dass $f(b) = f(a)$ gilt. Wir nehmen an, das sei nicht der Fall, dass also $f(a) > f(b)$; dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $c \in (a, b)$ mit $f(a) > f(c) > f(b)$. Wir betrachten die Menge $A = \{x \in (a, b) | f(x) = f(c)\}$; sei $x_1 = \sup A$. Wegen der Stetigkeit von f gilt dann auch $f(x_1) = f(c)$ (dazu können wir eine beliebige Folge betrachten, die in A gegen x_1 konvergiert). Daraus folgt, dass $a < x_1 < b$ ist ($x_1 = b$ kann wegen $f(x_1) = f(c) > f(b)$ nicht eintreten). Nach Bedingung (i) gibt es dann ein $y \in (x_1, b]$ mit $f(y) > f(x_1) > f(b)$, und erneut nach dem Zwischenwertsatz muss in (y, b) (also rechts von x_1!) ein weiteres x_2 mit $f(x_2) = f(x_1)$ liegen – im Widerspruch dazu, dass $x_1 = \sup A$ war. Also war unsere Annahme falsch, d.h. es gilt $f(b) = f(a)$. (Direkt mit a an Stelle von c zu argumentieren, funktioniert nicht – es könnte $A = \{a\}$ sein, und Bedingung (i) wäre nicht anwendbar!)

Aufgabe 6

1. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$ divergiert, wie wir mit dem Quotientenkriterium zeigen werden. Sei $a_n = \frac{n^n}{2^n n!}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{2^n n!}{n^n} \\
&= \frac{(n+1)(n+1)^n 2^n n!}{2\cdot 2^n (n+1) n! n^n} = \frac{(n+1)^n}{2n^n} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1+n}{n})^n = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n.
\end{aligned}$$

   Die Folge $(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|)$ konvergiert somit gegen $\frac{e}{2}$. Somit sind fast alle $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, und das Quotientenkriterium zeigt, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$ divergent ist.

2. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{(-1)^n}{n})^{n^2}$ divergiert ebenfalls. Zum Beweis verwenden wir das Wurzelkriterium.Sei $a_n = (1 + \frac{(-1)^n}{n})^{n^2}$. Für gerade Indizes ist $\sqrt[n]{|a_n|} = (1+\frac{1}{n})^n$. Die Teilfolge $(\sqrt[2n]{|a_{2n}|})$ konvergiert somit gegen $e > 1$. Damit sind unendlich viele Glieder der Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ größer als 1. Mit dem Wurzelkriterium folgt die Divergenz der Reihe.

Aufgabe 7

1. In der Formel $\forall x P(x) \to P(y)$ ist x gebunden und y frei.
2. In der Formel $\forall x P(x) \to Q(x,y)$ ist x in $P(x)$ gebunden. In $Q(x,y)$ sind x und y frei.
3. In der Formel $\forall x(P(x) \to Q(x,y))$ ist x in $P(x)$ gebunden. In $Q(x,y)$ ist x gebunden und y frei.
4. In der Formel $Q(x,y) \to \exists y P(x)$ sind alle Variablensymbole frei.

Klausur am 27.02.2016:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $A^{n_0} = A$, und $\begin{pmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A = A^1$. Es gilt also der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt. Es gilt aber tatsächlich

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + n \cdot 0 & 1 \cdot 1 + n \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 & | & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 2 & 2 & 4 & m & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir vertauschen die ersten beiden Zeilen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & | & 3 \\ 2 & 2 & 4 & m & | & 1 \end{pmatrix},$$

subtrahieren von der zweiten das dreifache der ersten und von der dritten das doppelte der ersten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & | & -1 \end{pmatrix},$$

multiplizieren die zweite mit -1 und subtrahieren sie dann von der ersten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & | & -1 \end{pmatrix} \qquad (*)\ .$$

Nun müssen wir unterscheiden:

1. Im Fall $m = 0$ haben wir (nachdem wir die letzte Zeile noch mit -1 multipliziert und von der ersten subtrahiert haben) die TNF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} ,$$

also ist Rg(A)=2, aber Rg($A|b$)=3, und das Gleichungssystem hat keine Lösung.

2. In allen anderen Fällen ($m \neq 0$) können wir in ($*$) die letzte Zeile durch a dividieren

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

und erhalten (indem wir die dritte Zeile zur ersten addieren und von der zweiten subtrahieren) die TNF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1-\frac{1}{m} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{m} \end{pmatrix} .$$

Zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1-\frac{1}{m} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} \\ 0 \\ -\frac{1}{m} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir können auch die TNF „von unten" auflösen und erhalten

$$x_4 = -\frac{1}{m} \ , \quad x_3 \text{ beliebig} \ , \quad x_2 = \frac{1}{m} - 2x_3 \ , \quad x_1 = 1 - \frac{1}{m}$$

(mit dem gleichen Ergebnis).

Aufgabe 3

Es ist

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(A) = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ a = d = 0 \ \Leftrightarrow \ A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} ,$$

also $\operatorname{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R}) \mid b, c \in \mathbb{R} \right\} = \{ b \cdot E_{12} + c \cdot E_{21} \mid b, c \in \mathbb{R} \}$. Die Einheitsmatrizen E_{12} und E_{21} bilden also ein Erzeugendensystem von Kern(f), und da sie

linear unabhängig sind, bilden sie auch eine Basis von Kern(f). Diese Basis kann durch E_{11} und E_{22} zur (kanonischen) Basis von $M_{22}(\mathbb{R})$ ergänzt werden, und $f(E_{11})$ und $f(E_{22})$, also $f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ bilden dann eine Basis von Bild(f).

Bild(f) ist also ganz $\mathbb{R}^2$; das hätte man auch mit dem Rangsatz zeigen können, oder man konnte einfach nachrechnen, dass f surjektiv ist (und dann irgendeine Basis von $\mathbb{R}^2$ angeben).

Aufgabe 4

a) Für $a_n = \frac{\sin(n)\cdot\cos(n)}{n}$ gilt $|\sin(n)| \leq 1, |\cos(n)| \leq 1$, also $|a_n| \leq \frac{1}{n}$. Damit ist a_n eine Nullfolge.

b) $\sin(x)$ und x sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar und nehmen in $x = 0$ jeweils den Wert 0 an; $\cos(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig (und differenzierbar) und nimmt in $x = 0$ den Wert 1 an. Nach de l'Hospital gilt dann

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1\ ,$$

da der rechte Grenzwert existiert; damit gilt auch

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\cos(x)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1\cdot 1 = 1\ .$$

Aufgabe 5

f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \cos(x) - x\cdot\sin(x)$. Das ist eine stetige Funktion mit $f'(0) = 1 - 0 = 1 > 0\,,\ f'(\frac{\pi}{2}) = 0 - \frac{\pi}{2}\cdot 1 < 0$. Nach dem Nullstellensatz von Bolzano hat damit f' also mindestens eine Nullstelle x_0 in $(0, \frac{\pi}{2})$. Es hat dort aber auch höchstens eine Nullstelle, denn in $(0, \frac{\pi}{2})$ gilt $f''(x) = -\sin(x) - \sin(x) - x\cos(x) < 0$ (weil $\sin(x)$ und $\cos(x)$ in $(0, \frac{\pi}{2})$ positiv sind), also ist f' in $(0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton fallend. Somit hat f' in $(0, \frac{\pi}{2})$ genau eine Nullstelle x_0, und wegen $f''(x_0) < 0$ liegt hier ein Maximum von f vor.

Aufgabe 6

Für $a_n = \frac{n!n^n}{(2n)!}$ berechnen wir

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!(n+1)^{n+1}(2n)!}{(2(n+1))!n!n^n} = \frac{(n+1)n!(n+1)(n+1)^n(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!n!n^n}\\ &= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\ &\to \frac{1}{4}\cdot e < 1 \text{ für } n\to\infty\ ,\end{aligned}$$

also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

Aufgabe 7

a) Wir setzen $f(x) = x$, $g'(x) = \cos(x)$, also $f'(x) = 1$ und (z.B.) $g(x) = \sin(x)$. Dann erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \cdot \cos(x)\,dx &= x \cdot \sin(x)|_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \sin(x)\,dx \;=\; x \cdot \sin(x)|_0^\pi - (-\cos(x))|_0^\pi \\ &= x \cdot \sin(x)|_0^\pi + \cos(x)|_0^\pi \;=\; \pi \cdot \sin(\pi) - 0 \cdot \sin(0) + \cos(\pi) - \cos(0) \\ &= 0 - 0 + (-1) - 1 \;=\; -2\,.\end{aligned}$$

b) Wir substituieren $x - 1 = g(x)$, also $g'(x) = 1, g(2) = 1, g(3) = 2$, und erhalten

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x+1}{x-1}\,dx &= \int_2^3 \frac{g(x)+2}{g(x)}\,g'(x)\,dx \;=\; \int_1^2 \frac{u+2}{u}\,du \;=\; \int_1^2 1 + \frac{2}{u}\,du \;=\; u + 2\ln(u)|_1^2 \\ &= 2 + 2\ln(2) - (1 + 2\ln(1)) = 2 + 2\ln(2) - (1+0) \;=\; 1 + 2\ln(2)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 8

a) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\alpha &= (A \to B) \vee (C \to (B \wedge D)) \\ &\approx (\neg A \vee B) \vee (\neg C \vee (B \wedge D)) && \text{Junktorminimierung} \\ &\approx \neg A \vee B \vee \neg C \vee (B \wedge D) && \text{Klammern weglassen}\,.\end{aligned}$$

Dies ist bereits eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α.

Aus dieser letzten Form erhalten wir

$$\begin{aligned}\alpha &\approx (\neg A \vee B \vee \neg C) \vee (B \wedge D) && \text{Klammern} \\ &\approx ((\neg A \vee B \vee \neg C) \vee B) \wedge ((\neg A \vee B \vee \neg C) \vee D) && \text{Distributivgesetz} \\ &\approx (\neg A \vee B \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) && \text{Klammern weglassen} \\ &\approx (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) && \text{Kommutativgesetz, Idempotenz}\,.\end{aligned}$$

Das ist eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform von α.

b) Die Wahrheitstafel ergibt

β	γ	$\beta \vee \gamma$	$\beta \wedge (\beta \vee \gamma)$
0	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**

Der Vergleich der ersten und letzten Spalte zeigt, dass β und $\beta \wedge (\beta \vee \gamma)$ äquivalent sind.

c) Die KNF, die wir in Teil a) für α gefunden haben, hat (wenn wir wieder entsprechend klammern) die Form

$$\alpha \approx \beta \wedge (\beta \vee \gamma)$$

mit $\beta = \neg A \vee B \vee \neg C\,,\ \gamma = D$. Nach Teil b) gilt damit

$$\alpha \approx \beta = \neg A \vee B \vee \neg C$$

– und das ist als einzelne Klausel gleichzeitig DNF und KNF. Insbesondere ist α von D unabhängig.

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2016

Klausur am 24.09.2016:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Für $n = 4$ gilt

$$2 \cdot 4 + 1 = 9 \leq 4^2 = 16 = 2^4,$$

also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Für ein $n \geq 4$ gilt $2n + 1 \leq n^2 \leq 2^n$.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist $2(n+1) + 1 \leq (n+1)^2 \leq 2^{n+1}$.

Es ist

$$\begin{aligned} 2(n+1)+1 = 2n+3 = 2n+1+2 &\leq n^2+2 \qquad \text{(mit Induktionsannahme)} \\ &\leq n^2 + 2 + (2n-1) \qquad \text{(da } n \geq 4 \text{ ist } 2n-1 \geq 0) \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, \end{aligned}$$

also ist $2(n+1)+1 \leq (n+1)^2$. Weiter ist

$$\begin{aligned} (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 &\leq 2^n + 2n + 1 \qquad \text{(mit Induktionsannahme)} \\ &\leq 2^n + 2^n \qquad \text{(wieder mit Induktionsannahme } 2n+1 \leq 2^n) \\ &= 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}, \end{aligned}$$

also ist $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$ und insgesamt $2(n+1)+1 \leq (n+1)^2 \leq 2^{n+1}$. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 2

(a) Die Menge U_1 ist kein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$. Es sind nämlich zum Beispiel $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in U_1$, aber

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \notin U_1.$$

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_1 kein Unterraum sein kann.

(b) U_2 ist ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$, was wir mit dem Unterraumkriterium zeigen werden. Es ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U_2$. Seien weiter $\begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} \in U_2$ und sei $s \in \mathbb{Q}$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix} \in U_2$$

und

$$s \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa & 0 \\ -sa & 0 \end{pmatrix} \in U_2.$$

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_2 ein Unterraum ist.

(c) U_3 ist kein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$, denn $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin U_3$.

Aufgabe 3

(a) Wir überführen A in Treppennormalform. Dazu addieren wir das 2-fache der ersten Zeile zur zweiten und die erste Zeile zur dritten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nun multiplizieren wir die zweite Zeile mit $\frac{1}{3}$. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zum Schluss wird noch die zweite Zeile von der ersten subtrahiert und das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Treppennormalform von A. Um die Lösungsmenge von Ax=0 zu ermitteln, streichen wir nun in der Treppennormalform die Nullzeile und füllen dann so mit Nullzeilen auf, dass die Matrix quadratisch ist und die Pivotelemente auf der Diagonalen stehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ersetzen wir die Nullen auf der Diagonalem durch -1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und lesen die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ bzw. eine Basis der Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

mit Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Die Basis $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ von $\mathcal{L}$ kann zum Beispiel durch die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden. Wir zeigen, dass die 4 Vektoren linear unabhängig sind. Dazu seinen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$a + c = 0, a = 0, b = 0, -b + d = 0$$

und damit auch $a = b = c = d = 0$. Also sind die 4 Vektoren linear unabhängig und, da 4 linear unabhängige Vektoren in einem 4-dimensionalen Raum eine Basis bilden, auch eine Basis.

Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ können durch die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ zu einer Basis ergänzt werden.

(c) Es ist $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix})$ und $\mathcal{C} = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$. Dann ist

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Also ist

$${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & -2 & 1\\0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ linear.

Sei zunächst $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$ und $v \in \mathrm{Kern}(f \circ f)$. Dann ist $f(f(v)) = 0$, also $f(v) \in \mathrm{Kern}(f)$. Außerdem ist natürlich $f(v) \in$ Bild(f) und damit $f(v) \in \mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$. Es folgt $f(v) = 0$, also $v \in \mathrm{Kern}(f)$. Damit ist gezeigt, dass $\mathrm{Kern}(f \circ f) \subseteq \mathrm{Kern}(f)$ gilt. Es gilt aber auch $\mathrm{Kern}(f) \subseteq \mathrm{Kern}(f \circ f)$, denn für $v \in \mathrm{Kern}(f)$ gilt $f(v) = 0$, also auch $f(f(v)) = 0$. Also ist $\mathrm{Kern}(f \circ f) = \mathrm{Kern}(f)$.

Nun nehmen wir an, dass $\mathrm{Kern}(f \circ f) = \mathrm{Kern}(f)$ gilt und müssen $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$ zeigen. Sei also $v \in \mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f)$. Da $v \in \mathrm{Bild}(f)$, gibt es ein $w \in V$ mit $v = f(w)$. Da $v \in \mathrm{Kern}(f)$, gilt $f(v) = 0$ und damit auch $f(f(w)) = 0$. Also ist $w \in \mathrm{Kern}(f \circ f) = \mathrm{Kern}(f)$. Es folgt $v = f(w) = 0$. Damit ist gezeigt, dass $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$ gilt.

Aufgabe 5

Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn a_n ist ein Produkt, bei dem jeder Faktor größer als 0 ist. Außerdem ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} b_i = \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right) b_{n+1} = a_n b_{n+1} < a_n,$$

denn $a_n, b_{n+1} > 0$ und $b_{n+1} < 1$. Also ist die Folge monoton fallend. Damit ist sie auch nach oben beschränkt, zum Beispiel durch $a_1 = b_1$. Da die Folge monoton und beschränkt ist, ist sie konvergent.

Aufgabe 6

Sei $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ für alle $x \in D$.

(a) Mit der Kettenregel gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

für alle $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Weiter ist mit der Ketten- und Quotientenregel

$$f''(x) = -\frac{\sqrt{2 - x^2} - x(\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}})}{(\sqrt{2 - x^2})^2} = -\frac{\sqrt{2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}}{(\sqrt{2 - x^2})^2} = -\frac{\frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}}{(\sqrt{2 - x^2})^2} = -\frac{2}{(\sqrt{2 - x^2})^3}$$

für alle $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(b) Hat f ein lokalen Extremum bei $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, dann gilt $f'(x) = 0$, also $-\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = 0$. Das ist nur für $x = 0$ erfüllt. Da $f''(0) = -\frac{2}{\sqrt{2}^3} < 0$ gilt, liegt bei $x = 0$ ein lokales Maximum vor. Nun müssen noch die Randwerte $x = -\sqrt{2}$ und $x = \sqrt{2}$ betrachtet werden. Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ und $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$. Also liegt bei beiden Punkten ein lokales Minimum vor.

(c) Für das zweite Taylorpolynom von f in $x_0 = 1$ gilt

$$P_{2,1}(x) = \frac{f(1)}{0!}(x - 1)^0 + \frac{f'(1)}{1!}(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 = 1 - (x - 1) - (x - 1)^2.$$

Aufgabe 7

(a) Es gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^7 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^7}{n^7} = 2^7\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}$. Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}$ laut Studienbrief konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^7$.

(b) Die Reihe konvergiert nicht, denn $(\sqrt{3+n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge.

(c) Wir benutzen das Quotientenkriterium. Es ist

$$\frac{\frac{n!}{3(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n-1)!}{3n^n}} = \frac{n!n^n}{(n-1)!(n+1)^{n+1}} = \frac{n\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^{n+1}$$
$$= (\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^{-(n+1)}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-(n+1)} = e^{-1} < 1$ konvergiert die Reihe.

Aufgabe 8

Wir formen beide Formeln so lange mit Hilfe der Äquivalenzregeln um, bis die Negationszeichen direkt vor den Atomen bzw. Primformeln stehen.

(a)

$$\begin{aligned}\neg((A\vee B)\wedge(\neg B\vee C)) &\approx \neg(A\vee B)\vee\neg(\neg B\vee C) && \text{(De Morgan)}\\ &\approx (\neg A\wedge\neg B)\vee(\neg\neg B\wedge\neg C) && \text{(De Morgan)}\\ &\approx (\neg A\wedge\neg B)\vee(B\wedge\neg C) && \text{(Negationsregel)},\end{aligned}$$

und die letzte Formel ist in Negationsnormalform.

(b)

$$\begin{aligned}\neg(\forall x\exists y(R(x,y)\wedge(\neg Q(y)))) &\approx \exists x(\neg(\exists y(R(x,y)\wedge(\neg Q(y))))) && \text{(Quantorwechsel)}\\ &\approx \exists x\forall y(\neg(R(x,y)\wedge(\neg Q(y)))) && \text{(Quantorwechsel)}\\ &\approx \exists x\forall y(\neg R(x,y)\vee\neg\neg Q(y)) && \text{(De Morgan)}\\ &\approx \exists x\forall y(\neg R(x,y)\vee Q(y)) && \text{(Negationsregel)},\end{aligned}$$

und diese Formel ist in Negationsnormalform.

Mathematische Grundlagen (01141) **WS 2016/17**

Klausur am 04.03.2017:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Es sei $n_0 = 1$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \ ,$$

also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir (im Induktionsschritt) schließen, dass $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6}$ folgt. Mit der Induktionsannahme ist aber

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 && \text{(Aufspalten der Summe)} \\ &= \tfrac{n^3}{3} + \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{n}{6} + (n+1)^2 && \text{(Induktionsannahme)} \\ &= \tfrac{n^3}{3} + \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{n}{6} + n^2 + 2n + 1 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{13}{6}n + 1 \ , \end{aligned}$$

und das ist tatsächlich identisch mit

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} + \frac{n^2 + 2n + 1}{2} + \frac{n+1}{6} \\ &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1 \ . \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & | & 7 \\ 3 & 7 & 11 & 0 & | & 25 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & | & 14 \end{pmatrix} \ .$$

Wir subtrahieren von der zweiten Zeile das dreifache der ersten und von der dritten Zeile das doppelte der ersten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

addieren die zweite Zeile zur dritten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

und subtrahieren (um die Null über der zweiten Pivot-Eins zu erhalten) das doppelte der zweiten Zeile von der ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} .$$

Damit haben wir schon die Treppennormalform erreicht.

Zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir können auch die TNF „von unten“ auflösen und erhalten

$$x_4 = 4 \ , \quad x_3 \text{ beliebig} \ , \quad x_2 = 4 - 2x_3 \ , \quad x_1 = -1 + x_3$$

(mit dem gleichen Ergebnis).

Aufgabe 3

Es ist

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \begin{pmatrix} a+b+c & a-b \\ 2a+c & 2b+c \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ b = a, c = -2a$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \ (a \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) \ ,$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist als einzelner Vektor linear unabhängig, bildet also eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$. Dieser Vektor kann durch zwei beliebige Einheitsvektoren aus $\mathbb{R}^3$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden; z.B. sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig, denn aus $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $a+b = 0, a+c = 0, -2a = 0$, also $a = b = c = 0$.

Damit bilden (z.B.) $f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$ und $f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})$, d.h. $\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}$ eine Basis von Bild(f).

Aufgabe 4

Für $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$, $x \in I = [0, \infty)$ gilt $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$; damit liegt in $x_0 = 0$ ein globales (und damit gleichzeitig lokales) Minimum vor. Nun suchen wir nach möglichen weiteren Extrema im offenen Intervall $(0, \infty)$; dort müsste die Ableitung der (rationalen und damit auf dem ganzen Definitionsbereich differenzierbaren) Funktion f eine Nullstelle haben. Wegen

$$f'(x) = \frac{2x(x^3+1) - x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x - x^4}{(x^3+1)^2} = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

ist das für $x > 0$ nur bei $x_1 = \sqrt[3]{2}$ der Fall. Weiter lässt sich $f'(x) > 0$ für $0 < x < \sqrt[3]{2}$ und $f'(x) < 0$ für $x > \sqrt[3]{2}$ ablesen, also ist f streng monoton steigend auf $[0, x_1)$ und streng monoton fallend auf (x_1, ∞), also ist in $x_1 = \sqrt[3]{2}$ das einzige lokale (und globale) Maximum.

Aufgabe 5

Wenn f und g auf I differenzierbar sind, gilt das auch für h mit $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Gleichzeitig ist $h(a) = h(b) = 0$ (wegen $f(a) = 0$ bzw. $g(b) = 0$). Also existiert nach dem Satz von Rolle ein $x_0 \in (a, b)$ mit $h'(x_0) = 0$, d.h. $f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) = 0$. Da wegen der strengen Monotonie a die einzige Nullstelle von f und b die einzige Nullstelle von g ist, können wir durch $f(x_0)$ und $g(x_0)$ dividieren und erhalten wie behauptet $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}$.

Aufgabe 6

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^3 \geq 1$, somit auch $n^3 + 1 \leq 2n^3$ und damit $a_n = \frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$. Da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert nach dem Minorantenkriterium auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.

b) Wegen $\frac{n^2}{n^4+1} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$ und der bekannten Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch unsere Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$.

c) Hier können wir uns das Leben (bzw. eine saubere Lösung) leichter machen, indem wir Quotienten- und Majorantenkriterium hintereinanderschalten: Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ mit $d_n = \frac{n^2}{3^n}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} \to \frac{1}{3} < 1$ für $n \to \infty$; also konvergiert wegen $\frac{n^2}{3^n+1} < \frac{n^2}{3^n}$ und dem Majorantenkriterium auch unsere Reihe c).

Aufgabe 7

Der Zähler des Integranden ist (fast) die Ableitung des Nenners, daher substituieren wir $x^3 + 1 = g(x)$, also $g'(x) = 3x^2, g(0) = 1, g(2) = 9$, und erhalten

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx &= \frac{1}{3}\int\limits_0^2 \frac{1}{g(x)}\,g'(x)\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_1^9 \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\ln(u)\Big|_1^9 \\
&= \frac{1}{3}(\ln(9) - \ln(1)) = \frac{\ln(9)}{3}\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 8

Wir erhalten

$$\begin{array}{lll}
\alpha = & (D \vee (B \wedge \neg C)) \to A & \\
\approx & A \vee \neg(D \vee (B \wedge \neg C)) & \text{Junktorminimierung} \\
\approx & A \vee (\neg D \wedge \neg(B \wedge \neg C)) & \text{de Morgan} \\
\approx & A \vee (\neg D \wedge (\neg B \vee \neg\neg C)) & \text{de Morgan} \\
\approx & A \vee (\neg D \wedge (\neg B \vee C)) & \text{doppelte Verneinung} \\
\approx & (A \vee \neg D) \wedge (A \vee (\neg B \vee C)) & \text{Distributivgesetz} \\
\approx & (A \vee \neg D) \wedge (A \vee \neg B \vee C) & \text{Klammern weglassen .}
\end{array}$$

Dies ist eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform von α.

Wenn wir oben in der 5. Zeile wieder einsteigen, erhalten wir

$$\begin{array}{llll}
\alpha & \approx & A \vee (\neg D \wedge (\neg B \vee C)) & \\
\alpha & \approx & A \vee ((\neg D \wedge \neg B) \vee (\neg D \wedge C)) & \text{Distributivgesetz} \\
\alpha & \approx & A \vee (\neg D \wedge \neg B) \vee (\neg D \wedge C) & \text{Klammern weglassen} \\
. & & &
\end{array}$$

Das ist eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α.

Klausur Sommersemester 2017, Fragen und Antworten

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Sei $n_0 = 1$. Mit der Produktregel für die Ableitung und der Kettenregel für die Ableitung von e^{-x} gilt

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x} = (-1)^{n_0}(n_0(n_0-1) - 2n_0x + x^2)e^{-x}.$$

Also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Es gelte $f^{(n)}(x) = (-1)^n(n(n-1) - 2nx + x^2)e^{-x}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\left((n+1)n - 2(n+1)x + x^2\right)e^{-x}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x)\\
&= \left((-1)^n(n(n-1) - 2nx + x^2)e^{-x}\right)' \text{ Induktionsannahme}\\
&= (-1)^n\left((-2n + 2x)e^{-x} + (n(n-1) - 2nx + x^2)(-1)e^{-x}\right) \text{ Produktregel für die Ableitung}\\
&= (-1)^n(-2n + 2x - n(n-1) + 2nx - x^2)e^{-x}\\
&= (-1)^n(-n(n-1+2) + 2(n+1)x - x^2)e^{-x}\\
&= (-1)^{n+1}((n+1)n - 2(n+1)x + x^2)e^{-x}
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

(a) Wir bestimmen die Treppennormalform von A. Dazu subtrahieren wir das Zweifache der ersten Zeile von der zweiten, und wir subtrahieren die erste Zeile von der dritten. Wir erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & a-2 \end{pmatrix}.$$

Nun subtrahieren wir die zweite Zeile von der ersten und addieren das Zweifache der zweiten Zeile zur dritten. Es ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Nun müssen wir unterscheiden, ob $a = 0$ oder $a \neq 0$ gilt. Ist $a = 0$, dann ist die obige Matrix bereits in Treppennormalform. Ist $a \neq 0$, dann teilen wir die dritte

Zeile durch a und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun wird die dritte Zeile von der ersten und zweiten subtrahiert. Dies ergibt die Einheitsmatrix I_3, die in Treppennormalform ist.

(b) Für $a = 0$ ist die Abbildung f_A nicht bijektiv. Aus der Treppennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

von A lesen wir mit dem Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen ab, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in der Lösungmenge des Gleichungssystems $Ax = 0$ liegt. Es gilt also

$$f_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Damit ist f_A nicht injektiv und darum auch nicht bijektiv.

Aufgabe 3

(a) Wir zeigen mit dem Unterraumkriterium, dass U_f ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist. Wegen $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_f$. Seien nun $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in U_f$. Dann gilt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ und

$$f(\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+d \\ a+c \end{pmatrix}.$$

Also gilt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in U_f$. Sei nun noch $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$f(\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \lambda f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \lambda \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b \\ \lambda a \end{pmatrix}.$$

Also gilt auch $\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_f ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Da U_f und $\mathrm{Kern}(f)$ Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind, gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_f$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f)$, also auch $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subseteq U_f \cap \mathrm{Kern}(f)$.

Sei nun $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f \cap \text{Kern}(f)$. Dann gilt

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Kern}(f)$, und

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix},$$

denn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also auch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit insgesamt $U_f \cap \text{Kern}(f) \subseteq \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Aufgabe 4

Seien $a, b \in \mathbb{K}$, so dass $av + bw = 0$ gilt. Wir wenden f auf diese Gleichung an und erhalten

$$0 = f(0) = f(av + bw) = f(av) + f(bw) = af(v) + bf(w) = a\lambda v + b\mu w = \lambda av + \mu bw.$$

Aus $av + bw = 0$ folgt $bw = -av$. Dies setzen wir in die Gleichung $\lambda av + \mu bw = 0$ ein und bekommen

$$0 = \lambda av + \mu bw = \lambda av + \mu(-av) = (\lambda - \mu)av.$$

Da $v \neq 0$ gilt und aus $\lambda \neq \mu$ auch $\lambda - \mu \neq 0$ folgt, muss $a = 0$ gelten. Aus $a = 0$ folgt dann aber auch sofort $b = 0$, und die beiden Vektoren sind linear unabhängig.

Aufgabe 5

(a) Die Menge A der ungeraden natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt, besitzt also auch kein Maximum. Sie ist nach unten beschränkt (zum Beispiel durch 1), und 1 ist auch ihr Minimum.

(b) Es gilt

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -1 \text{ oder } x > 1\}.$$

Die Menge ist also weder nach oben noch nach unten beschränkt, und sie besitzt weder Minimum noch Maximum.

(c) Es ist

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| - 1 < 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}.$$

Die Menge ist also zum Beispiel durch 0 nach unten und durch 2 nach oben beschränkt, besitzt aber weder Minimum noch Maximum.

(d) Mit der ersten binomischen Formel erhalten wir

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0\}.$$

Die Menge ist also zum Beispiel durch -2 nach unten und durch 0 nach oben beschränkt. Außerdem ist -2 das Minimum und 0 das Maximum von D.

Aufgabe 6

Sei $m \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wir wählen nun ganz speziell $\epsilon = |a_m| > 0$. Dann gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < |a_m|$ für alle $n \geq n_0$. Da aber $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $|a_n| = -a_n$ und $|a_m| = -a_m$. Es gilt also $-a_n < -a_m$ für alle $n \geq n_0$ und damit $a_n > a_m$ für alle $n \geq n_0$.

Aufgabe 7

(a) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7)^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7)^n}{5^n} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{7}{5})^n.$$

Dies ist bis auf den Faktor $\frac{1}{5}$ eine geometrische Reihe der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, wobei $|q| > 1$ gilt. Die Reihe ist damit divergent.

(b) Für die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ benutzen wir das Wurzelkriterium. Es ist

$$\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{2^n}} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt[n]{n}}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} = 1$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2} < 1$. Es folgt, dass die Reihe konvergiert.

Aufgabe 8

(a) Als Wahrheitstafel für die Formel $\alpha = ((P \to Q) \wedge (R \vee Q)) \to (P \wedge Q)$ erhalten wir:

P	Q	R	$P \to Q$	$R \vee Q$	$(P \to Q) \wedge (R \vee Q)$	$P \wedge Q$	α
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Wir sehen, dass die Formel erfüllbar ist, denn es gibt eine Bewertung der Atome (z.B. $\mathfrak{I}(P) = \mathfrak{I}(Q) = \mathfrak{I}(R) = \mathbf{0}$), so dass die Bewertung der Formel **1** ist.

(b) Wir beginnen mit der ersten Formel und versuchen, sie mit Hilfe der Äquivalenzregeln in die zweite zu überführen.

$$\begin{aligned}
(P \wedge ((Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R))) \vee (R \wedge Q) &\approx (P \wedge (Q \wedge (R \vee \neg R))) \vee (R \wedge Q) \\
&\quad \text{(Distributivgesetze)} \\
&\approx (P \wedge (Q \wedge \mathbf{1})) \vee (R \wedge Q) \\
&\quad (\alpha \vee \neg\alpha \approx \mathbf{1}) \\
&\approx (P \wedge Q) \vee (R \wedge Q) \\
&\quad (\alpha \wedge 1 \approx \alpha) \\
&\approx (P \vee R) \wedge Q \\
&\quad \text{(Distributivgesetze).}
\end{aligned}$$

Also sind die beiden Formeln logisch äquivalent.

Klausur 8 September Sommersemester 2018, Antworten

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) **SoSe 2018**

Klausur am 08.09.2018:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion nach n.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3\cdot 1+1}$. Also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Es gelte $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, dass $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n+1}{3(n+1)+1} = \frac{n+1}{3n+4}$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} + \frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \qquad \text{mit der Induktionsannahme} \\
&= \frac{(3n+4)n}{(3n+1)(3n+4)} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{n+1}{3n+4}.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

(a) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^4$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}) &= f(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ x_4+y_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3) \\ (x_2+y_2)+(x_3+y_3)+(x_4+y_4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_2+x_3+x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+y_2+y_3 \\ y_2+y_3+y_4 \end{pmatrix} = f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix})
\end{aligned}$$

und

$$f(a\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}ax_1\\ax_2\\ax_3\\ax_4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}ax_1+ax_2+ax_3\\ax_2+ax_3+ax_4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_2+x_3+x_4\end{pmatrix} = af(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}).$$

Also ist f linear.

(b) Es gilt $f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_2+x_3+x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, also $A = \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$.

(c) Es gilt $\mathrm{Kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$. Es muss also das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ gelöst werden. Dazu bringen wir A in Treppennormalform. Es muss nur noch die zweite Zeile von der ersten subtrahiert werden. Das ergibt

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist bereits in Treppennormalform. Wir fügen zwei Nullzeilen und (-1)en auf der Diagonalen hinzu

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

und lesen ab, dass die Vektoren $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ bilden.

(d) Mit (c) ist $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$. Also ist f nicht injektiv. Mit dem Rangsatz gilt weiter $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2 + \dim(\mathrm{Bild}(f))$, also folgt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2$. Weil auch $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ gilt, folgt $\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}^2$, und f ist surjektiv.

(e) Wir müssen die Basiselemente von $\mathcal{B}$ in f einsetzen und die Bilder als Linearkombination der Elemente aus $\mathcal{C}$ schreiben:

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$f(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Nun werden die Koeffizienten in den Zeilen in die Spalten der Matrix geschrieben.

$$_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

(a) Da $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1$ Linearkombinationen von x_1, x_2, x_3 sind, folgt sofort $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1 \in \langle x_1, x_2, x_3\rangle$ und damit auch $\langle x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1\rangle \subseteq \langle x_1, x_2, x_3\rangle$. Wegen

$$x_1 = \frac{1}{2}((x_1+x_2)-(x_2+x_3)+(x_3+x_1))$$
$$x_2 = \frac{1}{2}((x_2+x_3)-(x_3+x_1)+(x_1+x_2))$$
$$x_3 = \frac{1}{2}((x_3+x_1)-(x_1+x_2)+(x_2+x_3))$$

gilt $x_1, x_2, x_3 \in \langle x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1\rangle$ und damit auch $\langle x_1, x_2, x_3\rangle \subseteq \langle x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1\rangle$.

(b) Im Allgemeinen gilt nicht $\langle x_1, x_2, x_3\rangle = \langle x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1\rangle$. Ist zum Beispiel $x_1 \neq 0$ und $x_1 = x_2 = x_3$, dann ist $\langle x_1, x_2, x_3\rangle = \langle x_1\rangle \neq \{0\}$ und $\langle x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1\rangle = \langle 0,0,0\rangle = \{0\}$.

Aufgabe 4

(a) Ein lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen ist zum Beispiel $x_1 + x_2 = 0$ über den reellen Zahlen. Die Lösungsmenge ist $\{a\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(b) Das Intervall $(0,1)$ hat 0 als Häufungspunkt, denn die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in $(0,1)$ und konvergiert gegen 0, und $0 \notin (0,1)$.

(c) Es gilt

$$\int_a^b e^{-x}dx = [-e^{-x}]_a^b = -e^{-b} + e^{-a}.$$

Ist jetzt zum Beispiel $b = 0$, dann muss $e^{-a} = 2$ gelten, also $-a = \ln(2)$ oder $a = -\ln(2)$. Es gilt also $\int\limits_{-\ln(2)}^{0} e^{-x}dx = 1$.

Aufgabe 5

In allen Punkten $x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ ist f_a Quotient stetiger Funktionen, wobei der Nenner nicht 0 ist. Also ist f_a dort stetig, und wir müssen nur noch den Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ untersuchen. Die Funktion f_a ist stetig in $x = \frac{\pi}{2}$, wenn $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f_a(x) = f(\frac{\pi}{2}) = a$ gilt. Es ist

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f_a(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}.$$

Es gilt (weil sin und cos stetig sind) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(2x) = \sin(\pi) = 0$ und $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Wir können also versuchen, die Regel von de l'Hospital anzuwenden. Zähler und Nenner sind differenzierbar, und wir betrachten

$$\frac{(\sin(2x))'}{(\cos(x))'} = \frac{2\cos(2x)}{-\sin(x)} = -\frac{2\cos(2x)}{\sin(x)}.$$

Nun gilt

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} -\frac{2\cos(2x)}{\sin(x)} = -\frac{-2}{1} = 2,$$

also mit der Regel von de l'Hospital auch

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} = 2.$$

Für $a = 2$ ist also f_a stetig, für alle $a \neq 2$ ist f_a nicht stetig.

Aufgabe 6

Die Funktion f ist als Differenz zweier stetiger und differenzierbarer Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar. Weiter gilt $f(0) = -1 < 0$ und $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$. Da $\frac{\pi}{2} > 1$ gilt, ist $\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} < \frac{1}{e}$ und damit $1 - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} > 1 - \frac{1}{e} > 0$. Es ist also $f(\frac{\pi}{2}) > 0$. Aus dem Nullstellensatz folgt nun, dass f im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ eine Nullstelle besitzt. Weiter gilt

$$f'(x) = \cos(x) + e^{-x},$$

wobei $\cos(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ und $e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Das heißt, $f'(x) > 0$ für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv in diesem Intervall. Damit ist gezeigt, dass es nur eine Nullstelle im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ geben kann.

Aufgabe 7

Wir versuchen, das Konvergenzkriterium von Cauchy-Hadamard anzuwenden und betrachten die Folge $(\sqrt[n]{\left|\frac{2n+1}{n}\right|})_{n \in \mathbb{N}}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2n+1}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{2n+1}{n}} = \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da

$$\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim \sqrt[n]{2} = \lim \sqrt[n]{3} = 1$ gilt, folgt mit dem Einschnürungssatz auch $\lim \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}} = 1$. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard gilt also, dass die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergiert. Es bleiben noch $x = 1$ und $x = -1$ zu betrachten. Da jedoch $\lim \frac{2n+1}{n} = \lim 2 + \frac{1}{n} = 2 \neq 0$ gilt, konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n}$ nicht. Es ist auch $((-1)^n \frac{2n+1}{n}) = ((-1)^n(2+\frac{1}{n})$ keine Nullfolge, denn die Folgenglieder sind für gerades n größer als 2 und für ungerades n kleiner als -2. Auch für $x = -1$ divergiert die Potenzreihe also.

Aufgabe 8

(a) Die Wahrheitstafel für die Formel sieht folgendermaßen aus:

A	B	C	$B \wedge \neg C$	$A \to (B \wedge \neg C)$	$\neg A \vee C$	$\neg B \to (\neg A \vee C)$	α
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

Da die Formel α für jede Bewertung der Atome die Bewertung **1** besitzt, ist es eine Tautologie.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
(A \to (B \wedge \neg C)) \to (\neg B \to (\neg A \vee C)) &\approx (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \to (B \vee (\neg A \vee C))(\text{ Junktorminimierung}) \\
&\approx \neg(\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee (B \vee (\neg A \vee C)) \text{ (Junktorminimierung)} \\
&\approx (A \wedge \neg(B \wedge \neg C)) \vee (B \vee (\neg A \vee C)) \text{ (De Morgan)} \\
&\approx (A \wedge (\neg B \vee C)) \vee (B \vee (\neg A \vee C)) \text{ (De Morgan)} \\
&\approx (A \wedge (\neg B \vee C)) \vee B \vee \neg A \vee C \text{ (Klammern)}
\end{aligned}$$

Die letzte Formel ist in Negationsnormalform.

Klausur 9 März 2019, Antworten

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Mathematische Grundlagen (01141) WS 2018/19

Klausur am 09.03.2019:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Es sei $n_0 = 1$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{1} 2^k = 2 = 2^2 - 2 = 2^{n_0+1} - 2 \,,$$

also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir (im Induktionsschritt) schließen, dass $\sum\limits_{k=1}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 2$ folgt. Mit der Induktionsannahme ist aber tatsächlich

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2^{n+1} && \text{(Aufspalten der Summe)} \\ &= 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} && \text{(Induktionsannahme)} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 2 \;=\; 2^{n+2} - 2 \,. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & | & 2 \\ 2 & 4 & -1 & m & | & 2 \end{pmatrix} .$$

Wir subtrahieren von der zweiten Zeile die erste und von der dritten Zeile das doppelte der ersten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & m-2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

und addieren die zweite Zeile zur dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 & | & 1 \end{pmatrix} . \qquad (*)$$

Im Fall $\underline{m = 1}$ haben wir in $(*)$ fast schon die Treppennormalform erreicht; wir müssen zum Aufräumen in der letzten Spalte nur noch die dritte Zeile von der ersten und der zweiten abziehen und erhalten die Treppennormmalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} .$$

Es gilt $\mathrm{Rg}(A|b) = 3 \neq \mathrm{Rg}(A) = 2$, das Gleichungssystem ist in diesem Fall also nicht lösbar.

Im Fall $\underline{m \neq 1}$ dividieren wir die letzte Zeile von $(*)$ durch $m-1$, subtrahieren sie anschließend von der ersten und von der zweiten Zeile und erhalten die Treppennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1-\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1-\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{m-1} \end{pmatrix} .$$

Es gilt $\mathrm{Rg}(A|b) = \mathrm{Rg}(A) = 3$, das Gleichungssystem ist also lösbar; zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und dann auf der Diagonalen -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & \frac{m-2}{m-1} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{m-2}{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{m-1} \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L}_{m\neq 1} = \left\{ \frac{1}{m-1} \begin{pmatrix} m-2 \\ 0 \\ m-2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Aufgabe 3

Es ist

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_4 - x_3 \\ x_3 - x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; x_2 = -x_1, x_3 = x_4$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\; (x_1, x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) ,$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Die beiden Vektoren sind linear unabhängig, denn es gilt

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_3 = 0 ,$$

sie bilden also eine Basis von Kern(f). Diese Vektoren können z.B. durch

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden; es ist

$$a\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\-a\\b+d\\b\end{pmatrix}=0\ \Leftrightarrow\ a=b=c=d=0\ ,$$

also sind die Vektoren linear unabhängig. Damit bilden

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ und } f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

eine Basis von Bild(f) (was man aber auch direkt hätte zeigen können).

Es ist dim(Kern(f))+dim(Bild(f))=2+2=4=dim($\mathbb{R}^4$), wie es der Rangsatz aussagt.

Aufgabe 4

a) Das wohl einfachste Beispiel ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, also Kern(f)=$\mathbb{R}$ und dim(Kern(f))=1.

b) Das halboffene Intervall $(0,1]$ hat 1 als Maximum; 0 ist Infimum, aber kein Minimum, da es nicht im Intervall liegt.

c) Die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist divergent, obwohl $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{n}{n+1}<1$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.

d) Für die Betragsfunktion gilt das Gewünschte (stetig, aber nicht differenzierbar) in $x_0=0$; die verschobene Betragsfunktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-1|$ hat dann die gleichen Eigenschaften in $x_0=1$: Sie ist als Komposition stetiger Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber für den Differenzenquotienten in $x_0=1$ gilt mit den beiden Nullfolgen $a_n=1/n$ bzw. $b_n=-1/n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1+a_n)-f(1)}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{a_n}=1$, aber $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1+b_n)-f(1)}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|b_n|}{b_n}=-1$.

(„ ... hat den Knick in $x_0=1$“ reicht als Begründung aber auch aus.)

Aufgabe 5

Wir betrachten die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = e^{-x}\,,\ g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Sie sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar (g ist eine rationale Funktion, deren Nenner keine Nullstelle hat). f ist als Spiegelung der e-Funktion an der y-Achse streng monoton fallend ($f'(x) = -e^{-x} < 0$). Wir untersuchen die (ebenfalls stetige und differenzierbare) Differenzfunktion $h = f - g$ auf Nullstellen. Für $x < 0$ gilt $f(x) > f(0) = e^0 = 1\,,\ g(x) = \frac{x^2}{x^2+1} < 1$, also jedenfalls $h(x) > 0$. In $x = 0$ gilt $h(0) = e^0 - \frac{0}{1} = e^0 = 1 > 0$ (auch hier liegt also keine Nullstelle vor), in (z.B.) $x = 1$ gilt dagegen $h(1) = e^{-1} - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{2} = \frac{2-e}{2e} < 0$ (wegen $e > 2$). Also hat h nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $(0, 1)$. In ganz $(0, \infty)$ kann es aber höchstens eine geben, denn wegen

$$h'(x) = -e^{-x} - \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -e^{-x} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \quad \text{für} \quad x > 0$$

ist h streng monoton fallend auf ganz $(0, \infty)$. Also gibt es genau ein x (und zwar in $(0, 1)$) mit $f(x) = g(x)$.

Aufgabe 6

Für $a_n = \frac{n!n^n}{(2n)!}$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)!(n+1)^{n+1}(2n)!}{(2(n+1))!n!n^n} = \frac{(n+1)n!(n+1)(n+1)^n(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!n!n^n} \\
&= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2 \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&\to \frac{1}{4} \cdot e < 1 \text{ für } n \to \infty\,,
\end{aligned}$$

also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

Aufgabe 7

Wir setzen $f(x) = \ln(x)\,,\ g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$, also $f'(x) = \frac{1}{x}\,,\ g(x) = 2x^{1/2} = 2\sqrt{x}$, und erhalten mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx &= f(x)g(x)\big|_1^2 - \int_1^2 f'(x)g(x)\,dx = \ln(x) \cdot 2\sqrt{x}\big|_1^2 - \int_1^2 \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx \\
&= 2\sqrt{2}\ln(2) - 0 - \int_1^2 2x^{-1/2}\,dx = 2\sqrt{2}\ln(2) - 2 \cdot 2x^{1/2}\Big|_1^2 \\
&= 2\sqrt{2}\ln(2) - 4(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}(2\ln(2) - 4) + 4\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8

Wir erhalten

$$\begin{array}{rcll} \alpha & = & (A \to B) \vee (C \to (A \wedge B)) & \\ & \approx & (B \vee \neg A) \vee ((A \wedge B) \vee \neg C) & \text{Junktorminimierung} \\ & \approx & B \vee \neg A \vee (A \wedge B) \vee \neg C & \text{Klammern weglassen .} \end{array}$$

Dies ist schon eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α.

Wenn wir darauf das Kommutativgesetz anwenden und erneut Klammern setzen, erhalten wir

$$\begin{array}{rcll} \alpha & \approx & (A \wedge B) \vee (B \vee \neg A \vee \neg C) & \\ & \approx & (A \vee (B \vee \neg A \vee \neg C)) \wedge (B \vee (B \vee \neg A \vee \neg C)) & \text{Distributivgesetz} \\ & \approx & (A \vee B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (B \vee B \vee \neg A \vee \neg C) & \text{Klammern weglassen ;} \end{array}$$

Das ist bereits eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform; sie kann deutlich „verschönert“ werden durch

$$\begin{array}{rcll} \alpha & \approx & \mathbf{1} \wedge (B \vee B \vee \neg A \vee \neg C) & (A \vee \neg A = \mathbf{1}, \mathbf{1} \vee \beta = \mathbf{1}) \\ & \approx & (B \vee \neg A \vee \neg C) & \mathbf{1} \wedge \beta = \beta, \text{Idempotenz .} \end{array}$$

Das ist eine einzelne Klausel, also ebenfalls eine konjunktive Normalform von α (und gleichzeitig ebenfalls eine disjunktive Normalform!).

Klausur 30 September Summer 2019, Antworten

Mathematische Grundlagen (FernUniversität in Hagen)

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Die Behauptung soll für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt werden. Deshalb ist im Induktionsanfang $n_0 = 1$. Dann gilt mit der Quotientenregel für die Ableitung

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x} = \frac{(-1)(x-1)}{e^x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Sei nun $n \in \mathbb{N}$, und es gelte $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, dass für das n aus der Induktionsannahme gilt: $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(x-(n+1))}{e^x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei nun also $x \in \mathbb{R}$. Es ist

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \left(\frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}\right)'.$$

Zur Berechnung der Ableitung benutzen wir die Quotientenregel und erhalten

$$\begin{aligned}\left(\frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}\right)' &= (-1)^n\frac{e^x-(x-n)e^x}{(e^x)^2} = (-1)^n\frac{1-(x-n)}{e^x} = (-1)^n\frac{-x+(n+1)}{e^x}\\ &= (-1)^n\frac{(-1)(x-(n+1))}{e^x} = \frac{(-1)^{n+1}(x-(n+1))}{e^x}.\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt nun, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix zum Gleichungssystem ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & | & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Um diese in Treppennormalform zu überführen, addieren wir die erste Zeile zur zweiten und subtrahieren die erste Zeile von der dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Nun vertauschen wir die zweite und die vierte Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Jetzt addieren wir die zweite Zeile zur ersten, subtrahieren das Siebenfache der zweiten Zeile von der dritten und addieren das Dreifache der zweiten Zeile zur vierten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen die dritte und vierte Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & | & 5 \end{pmatrix}$$

Zum Schluss multiplizieren wir die dritte Zeile mit (-1) und subtrahieren anschließend das Vierfache der dritten Zeile von der vierten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist jetzt in Treppennormalform. Wir lesen ab, dass der Rang der Koeffizientenmatrix 3 ist, während der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix 4 ist. Das Gleichungssystem ist also nicht lösbar, die Lösungsmenge ist die leere Menge $\emptyset$.

Aufgabe 3

1. (a) Die Abbildung $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad + bc$ ist nicht linear. Es ist zum Beispiel $f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1$, aber

$$f(2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) = 4 \neq 2f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

   (b) Die Abbildung $g : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $g(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a - 2(b + c) - d$ ist linear.

Seien $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\begin{aligned} g(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) &= g(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}) \\ &= a_1+a_2-2(b_1+b_2+c_1+c_2)-(d_1+d_2) \\ &= (a_1-2(b_1+c_1)-d_1)+(a_2-2(b_2+c_2)-d_2) \\ &= g(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}) + g(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

Außerdem gilt für $r \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$

$$g(r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = g(\begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}) = ra-2(rb+rc)-rd = r(a-2(b+c)-d) = rg(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}).$$

Damit ist g linear.

2. (a) Die Vektoren der Menge M_1 sind linear unabhängig. Um das zu zeigen seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2b\\-b\\a-c\\3b+2c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Es folgt $a+2b=0, -b=0, a-c=0$ und $3b+2c=0$. Aus der zweiten Gleichung folgt sofort $b=0$ und damit aus der ersten Gleichung $a=0$ und aus der vierten Gleichung $c=0$. Also sind die Vektoren linear unabhängig.

(b) Die Vektoren aus der Menge M_2 sind linear abhängig. Um das zu zeigen, benötigt man eine Linearkombination der Vektoren, die den Nullvektor ergibt und in der nicht alle Koeffizienten gleich 0 sind. Entweder findet man diese Linearkombination durch Ausprobieren oder rechnet sie aus. Dazu seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\5\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2b\\-b+c\\a-b+3c\\5b-5c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Es folgt $a+2b=0, -b+c=0, a-b+3c=0$ und $5b-5c=0$. Hier ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das man mit den im Kurs gelernten Methoden lösen kann. Man sieht aber auch so ziemlich schnell, dass aus der zweiten und vierten Gleichung $b=c$ folgt. Das in die dritte Gleichung eingesetzt ergibt $a+2b=0$, also genau die erste Gleichung. Eine Lösung dieser Gleichung wäre $a=2$ und $b=-1$. Mit $b=c$ folgt dan auch $c=-1$. Und tatsächlich ist

$$2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Damit sind die Vektoren linear abhängig.

Aufgabe 4

Wir bestimmen ein Erzeugendensystem von Bild(f), indem wir die kanonische Basis von $\mathbb{Q}^4$ in f einsetzen. Es gilt

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

also $\text{Bild}(f) = \langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$. Diese drei Vektoren sind linear unabhängig, denn aus $a \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + c \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\b\\a+b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ für $a, b, c \in \mathbb{Q}$ folgt $c = 0, b = 0, a + b = 0$ und damit sofort $a = b = c = 0$. Da diese drei Vektoren linear unabhängig sind, folgt $\text{Bild}(f) = \mathbb{Q}^3$ und $\text{Rg}(f) = 3$.

Aufgabe 5

Als Produkt und Verkettung stetiger Funktionen ist f für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Es muss also nur noch der Punkt 0 betrachtet werden. Da $|\sin(\frac{1}{x})|$ beschränkt ist und $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$ gilt, folgt auch $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^3|\sin(\frac{1}{x})|) = 0 = f(0)$. Somit ist f stetig im Punkt 0 und damit auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 6

Angenommen, f ist nicht injektiv. Dann existieren $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ und $f(x) = f(y)$. Mit dem Mittelwertsatz (oder dem Satz von Rolle) angewendet auf das Intervall $[x, y]$ gibt es ein $z \in (x, y)$ mit

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $f'(x_0) \neq 0$ für alle $x_0 \in (a, b)$ also insbesondere auch für alle $x_0 \in (x, y)$ gilt. Also ist f injektiv.

(f' kann durchaus unstetig sein, siehe z.B. die Klausur vom WS 17/18 – man kann also nicht sofort folgern, dass f' entweder strikt positiv oder strikt negativ sein und deshalb f streng monoton und daher injektiv sein muss. Erst **nachdem** wir die Injektivität gezeigt haben, folgt mit 15.2.12 auch die Monotonie und damit das eindeutige Vorzeichen von f'.)

Aufgabe 7

Mit dem Leibniz-Kriterium kann man zeigen, dass die Reihe konvergiert. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{n+1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, denn

$$\frac{\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2}}{\frac{n+1}{n^2}} = \frac{(n+2)n^2}{(n+1)^3} = \frac{n^3+2n^2}{n^3+3n^2+3n+1} < 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also $a_{n+1} < a_n$. Außerdem konvergiert die Folge gegen 0, denn $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = 0$. Mit dem Leibniz-Kriterium (bzw. der im Kurstext darauf folgenden Aufgabe) folgt nun, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$ konvergiert.

Die Reihe konvergiert aber nicht absolut, denn $\frac{n+1}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die harmonische Reihe eine divergente Minorante für

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}.$$

Aufgabe 8

(a) Die Wahrheitstafel für α sieht folgendermaßen aus:

A	B	C	$A \to B$	$B \leftrightarrow C$	$(A \to B) \wedge (B \leftrightarrow C)$	$A \wedge B$	α
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Also ist α erfüllbar, aber nicht tautologisch, und nicht widerspruchsvoll.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha &\approx ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (B \vee \neg C)) \to (A \wedge B) \quad \text{(Junktorminimierung, Klammern)} \\
&\approx \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (B \vee \neg C)) \vee (A \wedge B) \quad \text{(Junktorminimierung)} \\
&\approx \neg(((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \wedge (B \vee \neg C)) \vee (A \wedge B) \quad \text{Klammern} \\
&\approx (\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \vee \neg(B \vee \neg C)) \vee (A \wedge B) \quad \text{(DeMorgan)} \\
&\approx (\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee C) \vee \neg(B \vee \neg C)) \vee (A \wedge B) \quad \text{(DeMorgan,Klammern)} \\
&\approx (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C) \vee (A \wedge B) \quad \text{(DeMorgan, Klammern).}
\end{aligned}$$

Dies ist eine disjunktive Normalform für α.